Research Reports on Mathematical and Computing Sciences
Series B : Operations Research

Department of Mathematical and Computing Sciences
Tokyo Institute of Technology
2-12-1 Oh-Okayama, Meguro-ku, Tokyo 152-8552 Japan

Linearization and Lagrangian Relaxation Techniques for Polynomial Programs (in Japanese)[1]

Hayato Waki⋆, Masakazu Kojima† and Sunyoung Kim‡

Research Report B-399, December 2003

Abstract. A polynomial program is mimimizing a polynomial objective function over a feasible region described by a finite set of polynomial inequalities. SDP (semidefinite programming) relaxation methods for polynomial programs proposed recently by Lasserre and Parrilo independently show powerful theoretical results, however, the size of the resulting SDP relaxation even for a small size polynomial program is too large to handle in practice. The purpose of this paper is to present methods generating SDP relaxations of reduced size to improve the practical performance. Since no convergence to the optimal value of a given polynomial program is guaranteed in theory, the theoretical properties of the proposed SDP relaxations are weaker than Lasserre's SDP relaxations. In practice, the propsosed SDP relaxations with smaller size provide computational advantages over Lasserre's relaxtions. The size of the SDP relaxations can be further reduced for a polynomial program with a separable structure. The paper is written in Japanese.

Key words.

Polynomial Optimization Problem, Global Optimization, Lagrangian Relaxation, Sums of Squares Optimization, Semidefinite Programming Relaxation

⋆ Department of Mathematical and Computing Sciences, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1 Oh-Okayama, Meguro-ku, Tokyo 152-8552 Japan. *Hayato.Waki@is.titech.ac.jp*

† Department of Mathematical and Computing Sciences, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1 Oh-Okayama, Meguro-ku, Tokyo 152-8552 Japan. *kojima@is.titech.ac.jp*

‡ Department of Mathematics, Ewha Women's University, 11-1 Dahyun-dong, Sudaemoon-gu, Seoul 120-750 Korea. A considerable part of this work was conducted while this author was visiting Tokyo Institute of Technology. Research supported by Kosef R004-000-2001-00200. *skim@ewha.ac.kr*

[1]To appear in RIMS (Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University) Kokyuroku

多項式計画に対する線形化緩和と Lagrange 緩和[2]

東京工業大学大学院 情報理工学研究科　脇 隼人 (Hayato Waki)[3]
Department of Mathematical and Computing Sciences, Tokyo Institute of Technology

東京工業大学大学院 情報理工学研究科　小島 政和 (Masakazu Kojima)[4]
Department of Mathematical and Computing Sciences, Tokyo Institute of Technology

Department of Mathematics, Ewha Women's University　Sunyoung Kim[5]

1　はじめに

多項式計画とは, 目的関数も, 制約式も変数 $\boldsymbol{x}$ の多項式で書かれた最適化問題である. 2 次計画問題, 0-1 整数計画問題や双線形行列不等式など非常に多くの最適化問題を多項式計画に記述できる.

最近, Lasserre[2, 3] や Parrilo[5] によって多項式計画を半正定値計画問題に緩和して解く手法が独立に提案された. 彼らの緩和手法は理論的には非常に優れた性質を有している一方で, 緩和問題のサイズが非常に大きくなり実用的には解くのが困難である.

本論文では, Lasserre の提案した緩和に注目し, よりサイズの小さい緩和問題を生成する手法を提案し理論的な考察を行う. また, 特徴的な構造を持った多項式計画に対しては緩和問題のサイズをさらに小さくできることを述べる.

本論文の構成は以下のとおりである. 2 節では, Lasserre の緩和と提案する緩和について述べる. 3 節では, 提案した緩和の理論的特徴について触れる. 最後に, 特殊な構造を持った多項式計画に対する緩和を 4 節で述べる.

2　準備

この節では, まず, Lasserre[2, 3] によって提案された多項式計画に対する緩和とその特徴を簡単に述べる. 次に, Lasserre の緩和より弱い緩和を提案する.

2.1　Lasserre の緩和

多項式計画とは, 以下のように, 目的関数や制約式が多項式で構成される最適化問題である.

$$\text{(多項式計画)} \qquad \begin{cases} \min & f_0(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{1}$$

[2]京都大学数理解析研究所講究録掲載予定
[3]e-mail: Hayato.Waki@is.titech.ac.jp
[4]e-mail: kojima@is.titech.ac.jp
[5]e-mail: skim@math.ewha.ac.kr

ここで, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), \dots, f_m(\boldsymbol{x}))^T$, $f_i(\boldsymbol{x})$ $(i = 0, 1, \dots, m)$ は $\boldsymbol{x}$ に関する実多変数多項式である. また, $f_0(\boldsymbol{x})$ は定数項を持たないとする. さらに, 以下の説明のために単項式に関する記号を定義する. $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ とおいて, $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{a}}$ を $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ と定める.

Lasserre[2, 3] で提案されている緩和について述べる.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_r(\boldsymbol{x}) &= (1, x_1, \dots, x_n, x_1^2, x_1x_2, \dots, x_1x_n, x_2^2, \dots, x_n^2, \dots, x_n^r)^T \\ \boldsymbol{M}_r(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{u}_r(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}_r(\boldsymbol{x})^T \end{aligned}$$

とおく. ここで, r は自然数であり, $\boldsymbol{u}_r(\boldsymbol{x})$ は次数 r までの単項式を全て集めたベクトルで, $\boldsymbol{M}_r(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{u}_r(\boldsymbol{x})$ で構成される階数 1 の行列である. $\boldsymbol{M}_r(\boldsymbol{x}) \succeq \boldsymbol{O}$ は, 行列 $\boldsymbol{M}_r(\boldsymbol{x})$ が半正定値対称行列であることを表しており, 全ての $\boldsymbol{x}$ で成立するので, (1) は次の問題と同値である.

$$\begin{cases} \min & f_0(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} & f_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{M}_{N-w_i}(\boldsymbol{x}) \succeq \boldsymbol{O} \ (i = 1, \dots, m), \boldsymbol{M}_N(\boldsymbol{x}) \succeq \boldsymbol{O} \end{cases} \tag{2}$$

ただし, $w_i = \lceil \deg f_i/2 \rceil$ $(i = 0, 1, \dots, m)$ であり, $N \geq \max\{w_0, w_1, \dots, w_m\}$ を満たす整数である. 次に (2) に対して線形化を施す. 線形化とは, $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{a}}$ を $y_{\boldsymbol{a}}$ と置き換えることである.

例 2.1 $n = 2$ で,

$$f(x_1, x_2) = 3 + x_1x_2 + 4x_2 + 2x_1^2x_2 + x_1^3x_2^2$$

を線形化すると,

$$\begin{aligned} x_1x_2 &\rightarrow y_{(1,1)} \\ x_2 &\rightarrow y_{(0,1)} \\ x_1^2x_2 &\rightarrow y_{(2,1)} \\ x_1^3x_2^2 &\rightarrow y_{(3,2)} \end{aligned}$$

となるので, $f(x_1, x_2)$ を線形化した関数 $F(y_{\boldsymbol{a}})$ は,

$$F(y_{\boldsymbol{a}}) = 3 + y_{(1,1)} + y_{(0,1)} + 2y_{(2,1)} + y_{(3,2)}$$

となる. なお, $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{0}}$ は, $y_{\boldsymbol{0}}$ と線形化せず, 定数として扱う.

この操作により, (2) から次の緩和問題を構成することができる.

$$\begin{cases} \min & F_0(y_{\boldsymbol{a}}) \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{M}_{N-w_i}(f_iy_{\boldsymbol{a}}) \succeq \boldsymbol{O} \ (i = 1, \dots, m), \boldsymbol{M}_N(y_{\boldsymbol{a}}) \succeq \boldsymbol{O} \end{cases} \tag{3}$$

ここで, $F_0(y_{\boldsymbol{a}})$ を $f_0(\boldsymbol{x})$ を線形化した関数, $\boldsymbol{M}_N(y_{\boldsymbol{a}})$ を $\boldsymbol{M}_N(\boldsymbol{x})$ を線形化したものとする. また, $\boldsymbol{M}_{N-w_i}(f_iy_{\boldsymbol{a}})$ は, $\boldsymbol{M}_{N-w_i}(\boldsymbol{x})$ の各要素に $f_i(\boldsymbol{x})$ をかけて線形化したものである. このよ

うにして構成された緩和問題 (3) は半正定値計画問題となり, 内点法によって解くことができる. またこの緩和問題 (3) の双対問題は,

$$\begin{cases} \max & -X_{11} - \sum_{i=1}^{m} (f_i)_{\mathbf{0}} Z_{11}^i \\ \text{s.t.} & \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{B_a} \rangle + \sum_{i=1}^{m} \langle \boldsymbol{Z}^i, \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{a}}^i \rangle = (f_0)_{\boldsymbol{a}} \quad (\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}) \\ & \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z}^i \succeq \boldsymbol{O} \end{cases} \tag{4}$$

である. ここで, $(f_0)_{\boldsymbol{a}}$ は $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{a}}$ に対応する係数, $(f_i)_{\mathbf{0}}$ は $f_i(\boldsymbol{x})$ の定数項, $\boldsymbol{B_a}$, $\boldsymbol{C_a}$ は, $\boldsymbol{M}_N(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{M}_{N-w_i}(\boldsymbol{x})$ の $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{a}}$ に対応する係数の行列である, つまり, $\boldsymbol{M}_N(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{B_0} + \sum_{\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}} \boldsymbol{B_a} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{a}}$ である. $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{a}}^i$ についても同様である. また, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は行列の内積を表し, $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{B})$ である.

このように, N がひとつ決まれば, 多項式計画 (1) の緩和問題 (3) をひとつ構成することができる. 今, この緩和問題の最適値を p_N^*, 多項式計画の最適値を p^* とおけば,

$$p_N^* \leq p_{N+1}^* \leq p^* \quad (\forall N \geq \max_{i=0,1,\ldots,m} \lceil \deg f_i / 2 \rceil)$$

が成り立つことがわかるが, Lasserre は [7] の補題 4.1 を用いて次のことを示している.

定理 2.2 多項式計画 *(1)* の緩和問題 *(3)* とその双対問題 *(4)* について, 適当な仮定の下で $\lim_{N \to \infty} p_N^* = p^*$ ということができる.

定理 2.2 の 1 から, N を大きくして緩和問題 (3) を構成し解けば良いのだが, その際, 緩和問題 (3) の変数 $y_{\boldsymbol{a}}$ の数は $\binom{n+2N}{n}$, 双対問題 (4) の変数行列 $\boldsymbol{X}$ のサイズは $\binom{n+N}{n}$, $\boldsymbol{Z}_i$ のサイズは $\binom{n+N-w_i}{n}$ であり, 非常に大きくなり実用的に解くことができない.

2.2 提案する緩和

Lasserre の緩和ではサイズが大きくなり過ぎることを述べた. そこで, Lasserre の緩和よりサイズの小さい緩和問題を生成する手法を提案する.

そのため, 多項式計画 (1) に制約を加える.

$$\begin{cases} \min & f_0(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \geq \mathbf{0} \\ & \boldsymbol{x} \in B_a = \{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \theta(\boldsymbol{x}) := a - \|\boldsymbol{x}\|_2^2 \geq 0 \} \end{cases} \tag{5}$$

ただし, a は十分大きな値であり, 多項式計画 (1) の最適解は (5) でも最適解であるとする. これにより, 考えるべき多項式計画 (5) の実行可能領域が有界閉集合となる.

この多項式計画 (5) と次の多項式計画は同値である.

$$\begin{cases} \min & f_0(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \geq \mathbf{0} \\ & \boldsymbol{M}_N(\boldsymbol{x}) \succeq \boldsymbol{O}, \theta(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{M}_{N-1}(\boldsymbol{x}) \succeq \boldsymbol{O} \end{cases} \tag{6}$$

ここで, N は $N \geq \max_{i=0,1,\ldots,m}\lceil \deg f_i/2 \rceil$ を満たす整数である．この問題 (6) について線形化を行う．それにより次のような緩和問題を構成することができる．

$$\begin{cases} \min & F_0(y_{\boldsymbol{a}}) \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{F}(y_{\boldsymbol{a}}) \geq \boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{M}_N(y_{\boldsymbol{a}}) \succeq \boldsymbol{O}, \boldsymbol{M}_{N-1}(\theta y_{\boldsymbol{a}}) \succeq \boldsymbol{O} \end{cases} \tag{7}$$

ただし, $F_0(y_{\boldsymbol{a}})$ は $f_0(\boldsymbol{x})$ を線形化した関数, $\boldsymbol{F}(y_{\boldsymbol{a}})$ は, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ を線形化したもので, $\boldsymbol{M}_N(y_{\boldsymbol{a}})$, $\boldsymbol{M}_{N-1}(\theta y_{\boldsymbol{a}})$ も (3) と同様である．この緩和問題も半正定値計画問題になるので内点法で解くことができる．

この緩和問題 (7) の双対問題は以下のようになる．

$$\begin{cases} \max & -X_{11} - aZ_{11} - (\boldsymbol{f})_{\boldsymbol{0}}^T \boldsymbol{v} \\ \text{s.t.} & \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{a}} \rangle + \langle \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{a}} \rangle + (\boldsymbol{f})_{\boldsymbol{a}}^T \boldsymbol{v} = (f_0)_{\boldsymbol{a}} \quad (\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}) \\ & \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z} \succeq \boldsymbol{O}, \boldsymbol{v} \geq \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{8}$$

ここで, $(\boldsymbol{f})_{\boldsymbol{a}}$ は, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ の各要素 $f_i(\boldsymbol{x})$ の $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{a}}$ に対応する係数で構成される列ベクトルであり, $(\boldsymbol{f})_{\boldsymbol{0}}$ は, $f_i(\boldsymbol{x})$ の定数項を並べた列ベクトルである．

Lasserre の緩和問題 (3) と緩和問題のサイズを比較すると行列変数の数が減少した．したがって, 制約式の多い多項式計画に対しては問題のサイズと言う点で実用上有効であることが言える．

また, (6) で, $f_i(\boldsymbol{x})$ と $\boldsymbol{M}_{N-w_i}(\boldsymbol{x})$ の掛け合わせを行っていないので Lasserre の緩和より弱くなっている．そのため, 定理 2.2[2] の様に元問題の最適値に収束することは言えないが, 類似の性質を持っていることが言える．次節で, その理論的性質を述べる．

3　理論的性質

この節では, まず, 双対問題 (8) が Lagrange 双対問題から導かれることを示し, 次に, q_N^* を緩和問題 (7) の最適値とおけば, q_N^* が Lagrange 双対問題の最適値に収束することを示す．最後に, (5) の拡張について述べる．

多項式計画 (5) の Lagrange 関数 $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ を次のように定義する．

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) \quad = \quad f_0(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \quad (\forall \boldsymbol{x} \in B_a, \forall \boldsymbol{v} \geq \boldsymbol{0}).$$

ただし, $\boldsymbol{x}$ の範囲は $\mathbb{R}^n$ ではなく, B_a である．これにより多項式計画 (5) の Lagrange 双対問題は

$$\sup_{\boldsymbol{v} \geq \boldsymbol{0}} \inf_{\boldsymbol{x} \in B_a} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) \tag{9}$$

である．また, Lagrange 緩和問題とは (9) において, $\boldsymbol{v}$ を固定した以下の最適化問題のことを言う．

$$\begin{cases} \inf & L(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{v}}) \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{x} \in B_a \end{cases}$$

この Lagrange 緩和問題は, 次の最適化問題と同値である.

$$\begin{cases} \sup & t \\ \text{s.t.} & L(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{v}}) - t \geq 0 \quad (\boldsymbol{x} \in B_a) \end{cases} \tag{10}$$

この最適化問題 (10) に対して, 制約式

$$L(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{v}}) - t \geq 0 \quad (\boldsymbol{x} \in B_a) \tag{11}$$

を,

$$L(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{v}}) - t \in \Sigma_N + (a - \|\boldsymbol{x}\|_2^2)\Sigma_{N-1} \tag{12}$$

という恒等式に変形する. ただし, $\Sigma_N = \{\sum_{j=1}^k h_j(\boldsymbol{x})^2 \mid \deg h_j \leq N\}$ であり, $(a - \|\boldsymbol{x}\|_2^2)\Sigma_{N-1} = \{(a - \|\boldsymbol{x}\|_2^2)h(\boldsymbol{x}) \mid h \in \Sigma_{N-1}\}$ である.

なお, この変形は, 等価な変形ではない. (12) が成立するならば (11) は成立するが, 逆は必ずしも成立しない. また, 次数 N の多項式 $h_j(\boldsymbol{x})$ などで $L(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{v}}) - t$ を表現できる保証もない. したがって, この変形は $L(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{v}}) - t$ が, 次数 N, $N-1$ の多項式で表現できると制限していると考えることができる. ここでは, このような制限によって半正定値計画問題を得ることを示す.

ところで, [6] の補題 3.1 より Σ_N は,

$$\Sigma_N = \{\boldsymbol{u}_N(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{V} \boldsymbol{u}_N(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{V} \succeq \boldsymbol{O}\}$$

と書くことができる. このことから, 恒等式 (12) は,

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{v}}) - t &= \boldsymbol{u}_N(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{V} \boldsymbol{u}_N(\boldsymbol{x}) + (a - \|\boldsymbol{x}\|_2^2)\boldsymbol{u}_{N-1}(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{W} \boldsymbol{u}_{N-1}(\boldsymbol{x}) \\ &= \langle \boldsymbol{V}, \boldsymbol{u}_N(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}_N(\boldsymbol{x})^T \rangle + \langle \boldsymbol{W}, (a - \|\boldsymbol{x}\|_2^2)\boldsymbol{u}_{N-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}_{N-1}(\boldsymbol{x})^T \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{V}, \boldsymbol{M}_N(\boldsymbol{x}) \rangle + \langle \boldsymbol{W}, \theta(\boldsymbol{x})\boldsymbol{M}_{N-1}(\boldsymbol{x}) \rangle \end{aligned}$$

と変形できる. ここで, $\boldsymbol{M}_N(\boldsymbol{x})$, $\theta(\boldsymbol{x})\boldsymbol{M}_{N-1}(\boldsymbol{x})$ の各成分が多項式であることに着目すると,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_N(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{B_0} + \sum_{\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}} \boldsymbol{B_a} \boldsymbol{x^a}, \\ \theta(\boldsymbol{x})\boldsymbol{M}_{N-1}(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{C_0} + \sum_{\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}} \boldsymbol{C_a} \boldsymbol{x^a}. \end{aligned}$$

と書くことができる. なお, $\boldsymbol{B_0}$ は第 $(1,1)$ 成分が 1 で残りの成分は全て 0 の行列である. これを上の恒等式に代入すると,

$$L(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{v}}) - t = V_{11} + aW_{11} + \sum_{\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}} \left(\langle \boldsymbol{V}, \boldsymbol{B_a} \rangle + \langle \boldsymbol{W}, \boldsymbol{C_a} \rangle\right) \boldsymbol{x^a} \tag{13}$$

となる. ここで, $f_i(\boldsymbol{x})$ の $\boldsymbol{x^a}$ に対応する係数を $(f_i)_{\boldsymbol{a}}$ と書くと, 上の式の左辺は,

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{v}}) - t &= f_0(\boldsymbol{x}) - \sum_{i=1}^m f_i(\boldsymbol{x})\bar{v}_i - t \\ &= -\sum_{i=1}^m (f_i)_{\boldsymbol{0}}\bar{v}_i - t + \sum_{\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}} \left((f_0)_{\boldsymbol{a}} - \sum_{i=1}^m (f_i)_{\boldsymbol{a}}\bar{v}_i \right) \boldsymbol{x^a} \end{aligned}$$

となる．今, (13) は恒等式なので, 両辺を比較すると以下の線形等式を得る．

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^{m}(f_i)_{\mathbf{0}}\bar{v}_i - t &= V_{11} + aW_{11} \\ (f_0)_{\boldsymbol{a}} - \sum_{i=1}^{m}(f_i)_{\boldsymbol{a}}\bar{v}_i &= \langle \boldsymbol{V}, \boldsymbol{B_a}\rangle + \langle \boldsymbol{W}, \boldsymbol{C_a}\rangle \quad (\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}) \end{aligned}$$

したがって, Lagrange 緩和問題から導かれる最適化問題 (10) は

$$\begin{cases} \text{sup} & -V_{11} - aW_{11} - \sum_{i=1}^{m}(f_i)_{\mathbf{0}}\bar{v}_i \\ \text{s.t.} & \langle \boldsymbol{V}, \boldsymbol{B_a}\rangle + \langle \boldsymbol{W}, \boldsymbol{C_a}\rangle + \sum_{i=1}^{m}(f_i)_{\boldsymbol{a}}\bar{v}_i = (f_0)_{\boldsymbol{a}} \quad (\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}) \\ & \boldsymbol{V}, \boldsymbol{W} \succeq \boldsymbol{O} \end{cases}$$

と書き直すことができる．同様に, Lagrange 双対問題からも以下の半正定値計画問題を得ることができる

$$\begin{cases} \text{sup} & -V_{11} - aW_{11} - \sum_{i=1}^{m}(f_i)_{\mathbf{0}}v_i \\ \text{s.t.} & \langle \boldsymbol{V}, \boldsymbol{B_a}\rangle + \langle \boldsymbol{W}, \boldsymbol{C_a}\rangle + \sum_{i=1}^{m}(f_i)_{\boldsymbol{a}}v_i = (f_0)_{\boldsymbol{a}} \quad (\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}) \\ & \boldsymbol{V}, \boldsymbol{W} \succeq \boldsymbol{O}, \boldsymbol{v} \geq \mathbf{0}. \end{cases}$$

これは, (8) と同じである．つまり, 本論文で提案した緩和法においては, 緩和問題の主問題 (7) は制約式 $f_i(\boldsymbol{x})$ と, $\boldsymbol{M}_{N-w_i}(\boldsymbol{x})$ との掛け合わせを行わないことで得られ, 双対問題 (8) は Lagrange 双対問題 (9) を制限することで得られることがわかる．

次に, 以下の定理を示す．

定理 3.1 多項式計画 *(5)* が実行可能内点解を持てば, 緩和問題 *(7)* の最適値は, *Lagrange* 双対問題の最適値 q^* に収束する, つまり $\lim_{N\to\infty} q_N^* = q^*$.

この証明では, 以下の補題を用いる．

補題 3.2 $\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ を元問題 *(5)* の実行可能内点解と仮定すると, その緩和問題 *(7)* は実行可能内点解を持つ．したがって, 緩和問題 *(7)* とその双対問題 *(8)* に関して双対定理が成立する．

なお補題 3.2 の証明は後の節で行う．ここでは, この補題が成立すると仮定して定理 3.1 の証明を行う．

定理 3.1 の証明: まず, q^* が有限値をとることを示す．

$$q^* = \sup_{\boldsymbol{v}\geq\mathbf{0}} \inf_{\boldsymbol{x}\in B_a} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$$

である．B_a が有界閉集合であることから,

$$q^* \geq \inf_{\boldsymbol{x}\in B_a} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) > -\infty \quad (\forall \boldsymbol{v} \geq \mathbf{0}).$$

一方, $\bar{\boldsymbol{x}}$ を多項式計画 (5) の実行可能内点解とすると

$$\inf_{\boldsymbol{x}\in B_a} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) \leq \inf\{f_0(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{x} \in B_a\} \leq f_0(\bar{x}), \quad (\forall \boldsymbol{v} \geq \mathbf{0}).$$

したがって,

$$q^* \leq f_0(\bar{x}) < +\infty$$

がいえる. 以上から, q^* が有限値であることがわかる. 次に,

$$q_N^* \leq q_{N+1}^* \leq q^* \quad (N \geq \max\{w_0, w_1, \ldots, w_m\} =: N_0)$$

が成立することを示す. (8) の N を固定したときに得られる最適値を r_N^* とおく. [1] の補題 6.1 より, $r_N^* \leq q^*$ が全ての $N \geq N_0$ で成立する. また, 補題 3.2 より, $q_N^* = r_N^*$ なので, $q_N^* \leq q^*$ が成立する.

一方, $\boldsymbol{M}_N(y_{\boldsymbol{a}})$ は $\boldsymbol{M}_{N+1}(y_{\boldsymbol{a}})$ の, $\boldsymbol{M}_{N-1}(\theta y_{\boldsymbol{a}})$ は $\boldsymbol{M}_N(\theta y_{\boldsymbol{a}})$ の主座小行列にそれぞれなっている. したがって, $N+1$ として構成される緩和問題 (7) の最適解 $(y_{\boldsymbol{a}}^*)$ の次数 N までのベクトル y' は N で構成される緩和問題 (7) の実行可能解になっているので, $p_N^* \leq p_{N+1}^*$ が成立する.

最後に収束について示す. sup の定義より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $p^* - \varepsilon < \inf_{\boldsymbol{x} \in C} L(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{v}})$ を満たす $\bar{\boldsymbol{v}} \geq \boldsymbol{0}$ が存在する. つまり,

$$L(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{v}}) \quad > \quad q^* - \varepsilon \quad (\forall \boldsymbol{x} \in B_a)$$

である. ここで, Putinar[7] の補題 4.1 より, ある, N^* と次数が N^* 以下の多項式 $q(\boldsymbol{x})$ と次数が $N^* - 1$ 以下の多項式 $t(\boldsymbol{x})$ が存在して,

$$L(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{v}}) - (q^* - \varepsilon) \quad = \quad q(\boldsymbol{x})^2 + (a - \|\boldsymbol{x}\|^2) t(\boldsymbol{x})^2$$

が成立する. ここで, $q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{u}_{N^*}(\boldsymbol{x})$, $t(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{t}^T \boldsymbol{u}_{N^*-1}(\boldsymbol{x})$ とおけば,

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{v}}) - (q^* - \varepsilon) \quad &= \quad \langle \boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^T, \boldsymbol{u}_{N^*}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{u}_{N^*}(\boldsymbol{x})^T \rangle \\ &\qquad + \langle \boldsymbol{t}\boldsymbol{t}^T, (a - \|\boldsymbol{x}\|^2) \boldsymbol{u}_{N^*-1}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{u}_{N^*-1}(\boldsymbol{x})^T \rangle \end{aligned}$$

が成立する. $N = N^*$ における (8) において, $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^T$, $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{t}\boldsymbol{t}^T$, $\boldsymbol{v} = \bar{\boldsymbol{v}}$ とおけば, これらは実行可能解となりそのときの目的関数の値は $q^* - \varepsilon$ である. したがって, $r_{N^*}^* \geq q^* - \varepsilon$ を満たす. 点列 $\{q_N^*\}_{N \geq N_0}$ は単調非減少であり, 弱双対定理を用いれば, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$q^* - \varepsilon \leq q_N^* \leq q^* \quad (\forall N \geq N^*)$$

が成立する. これは, $\lim_{N \to \infty} q_N^* = q^*$ をいっている.

∎

注意 3.3 多項式計画 (5) において制約式 $\boldsymbol{x} \in B_a$ を加えたのは, 多項式計画 (5) の最適値が有限であることを保証するためだけでなく, Putinar[7] の補題 4.1 を用いるためでもある. ここでは, $\boldsymbol{x} \in B_a$ を加えたが, 他の有界性を表す制約式でも構わない.

本論文では, 簡単のために多項式計画 (1), (5) において $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{0}$ とおいたが, $-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{K}$ としてもやはり緩和問題を構成することができる. ここで, $\mathcal{K}$ は内点を持ち直線を含まない閉凸錐とする. つまり, 凸錐上の多項式計画

$$(\text{凸錐上の多項式計画}) \qquad \begin{cases} \min & f_0(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} & -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{K}, \boldsymbol{x} \in B_a \end{cases} \tag{16}$$

となる．この最適化問題 (16) に対する緩和問題は,

$$\begin{cases} \min & F_0(y_{\boldsymbol{a}}) \\ \text{s.t.} & -\boldsymbol{F}(y_{\boldsymbol{a}}) \in \mathcal{K}, \boldsymbol{M}_N(y_{\boldsymbol{a}}) \succeq \boldsymbol{O}, \boldsymbol{M}_{N-1}(\theta y_{\boldsymbol{a}}) \succeq \boldsymbol{O}, \end{cases} \tag{17}$$

となる．ただし, $F_0(y_{\boldsymbol{a}})$, $\boldsymbol{F}(y_{\boldsymbol{a}})$ は, $f_0(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ を線形化したものであり, N は $N \geq N_0$ を満たす自然数である．これは錐 $\mathcal{K}$ 上の線型計画問題なので内点法を適用することができる．また, 定理 3.1 と同様の定理が成立する．

系 3.4 多項式計画 *(16)* が実行可能内点解を持てば, 緩和問題 *(17)* の最適値 q_N^* は, *Lagrange* 双対問題の最適値 q^* に収束する, つまり $\lim_{N\to\infty} q_N^* = q^*$．ここで, $\bar{\boldsymbol{x}}$ が実行可能内点解とは, $-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})$ が $\mathcal{K}$ の内部に属することをいう．

4 構造を持った多項式計画に対する緩和

この節では, 多項式計画 (16) に対してさらに仮定を追加して議論する．まず始めに, 凸性を仮定する．次に, 分離可能性を仮定する．それぞれの仮定の元で, 提案した緩和の性質を調べる．

4.1 凸多項式計画

(16) に凸性を仮定して議論する．(16) が凸多項式計画とは, 目的関数 $f_0(\boldsymbol{x})$ が凸関数であり, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ が,

$$\lambda \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + (1-\lambda)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{f}(\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y}) \in \mathcal{K}, \quad (\forall\lambda \in [0,1], \forall\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n)$$

を満たす多項式計画のことを言う．凸多項式計画に対しては次のことが言える．

定理 4.1 凸多項式計画が実行可能内点解と最適解を持つなら, *Lagrange* 双対問題の最適値と凸多項式計画の最適値は一致する．

したがって, 定理 3.1, 4.1 より, (16) の緩和問題 (17) の最適値は, (16) の最適値に収束することがわかる．

4.2 分離可能な構造を持った多項式計画

分離構造を持った多項式計画とはとは次のような最適化問題のことである．

$$\begin{cases} \min & \displaystyle\sum_{k=1}^{\ell} f_0^k(\boldsymbol{x}_k) \\ \text{s.t.} & -\displaystyle\sum_{k=1}^{\ell} \boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{x}_k) \in \mathcal{K}, \boldsymbol{x}_k \in B_a^k = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n_k} \mid \theta_k(\boldsymbol{x}) := a_k - \|\boldsymbol{x}\|_2^2 \geq 0\} \quad (k = 1, \ldots, \ell) \end{cases} \tag{19}$$

ここで, $n=n_1+\cdots+n_\ell$, f_0^k は $\boldsymbol{x}_k$ に関する多項式, $\boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{x}_k)$ は, $\boldsymbol{x}_k$ に関する多項式 $f_i^k(\boldsymbol{x}_k)\quad(i=1,\dots,m)$ で構成される列ベクトルである．また, a_k はそれぞれ十分大きな値とする．$B_{\boldsymbol{a}}=B_{a_1}^1\times\cdots\times B_{a_\ell}^\ell$ とおく．

この最適化問題 (19) に対する Lagrange 関数 $L(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_\ell,\boldsymbol{v})$ は,$L_k(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{v})=f_0^k(\boldsymbol{x}_k)+\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{x}_k)\rangle$ とおくと

$$\begin{aligned}L(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_\ell,\boldsymbol{v}) &= \sum_{k=1}^{\ell} f_0^k(x_k)+\left\langle\boldsymbol{v},\sum_{k=1}^{\ell}\boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{x}_k)\right\rangle\\ &= \sum_{k=1}^{\ell}(f_0^k(\boldsymbol{x}_k)+\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{x}_k)\rangle)\\ &= \sum_{k=1}^{\ell}L_k(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{v})\quad(\forall\boldsymbol{v}\in\mathcal{K}^*,\forall\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_\ell)\in B_{\boldsymbol{a}})\end{aligned}$$

となる．ここで, $\mathcal{K}^*$ は $\mathcal{K}$ の双対錐である．したがって, (19) に対する Lagrange 双対問題は,

$$\sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{K}^*}\inf_{\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_\ell)\in B_{\boldsymbol{a}}}L(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_\ell,\boldsymbol{v})$$

である．任意の $\bar{\boldsymbol{v}}\in\mathcal{K}^*$ に対して,

$$\inf_{\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_\ell)\in B_{\boldsymbol{a}}}L(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_\ell,\bar{\boldsymbol{v}})=\sum_{k=1}^{\ell}\inf_{\boldsymbol{x}_k\in B_{a_k}}L_k(\boldsymbol{x}_k,\bar{\boldsymbol{v}})$$

であるから, Lagrange 緩和問題

$$\inf_{\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_\ell)\in B_{\boldsymbol{a}}}L(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_\ell,\bar{\boldsymbol{v}})\quad(\forall\bar{\boldsymbol{v}}\in\mathcal{K}^*)\tag{20}$$

は, $\eta_k=\inf_{\boldsymbol{x}_k\in B_{a_k}}L_k(\boldsymbol{x}_k,\bar{\boldsymbol{v}})$ とおけば, 第 3 節と同様に

$$\left\{\begin{array}{ll}\max & \sum_{k=1}^{\ell}\eta_k\\ \text{s.t.} & L_k(\boldsymbol{x}_k,\bar{\boldsymbol{v}})-\eta_k\geq 0\quad(\boldsymbol{x}_k\in B_{a_k})\end{array}\right.$$

と等価になる．さらに, 制約式

$$L_k(\boldsymbol{x}_k,\bar{\boldsymbol{v}})-\eta_k\geq 0\quad(\boldsymbol{x}_k\in B_{a_k})$$

に着目して, 3 節と同様に制限を加えると, 以下の最適化問題を導出できる．

$$\left\{\begin{array}{ll}\max & \sum_{k=1}^{\ell}\eta_k\\ \text{s.t.} & L_k(\boldsymbol{x}_k,\bar{\boldsymbol{v}})-\eta_k=\langle\boldsymbol{X}_k,\boldsymbol{u}_N(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{u}_N(\boldsymbol{x})^T\rangle\\ & +\langle\boldsymbol{Z},(a_k-\|\boldsymbol{x}_k\|_2^2)\boldsymbol{u}_{N-1}(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{u}_{N-1}(\boldsymbol{x}_k)^T\rangle\quad(\forall\boldsymbol{x}_k\in\mathbb{R}^{n_k},k=1,\dots,\ell)\\ & \boldsymbol{X}_k,\boldsymbol{Z}_k\succeq\boldsymbol{O}\quad(k=1,\dots,\ell).\end{array}\right.$$

したがって, 恒等式の両辺を比較することで, 次の半正定値計画問題を得る．

$$\left\{\begin{array}{ll}\max & \sum_{k=1}^{\ell}(-X_{11}^k-a_kZ_{11}^k+\sum_{i=1}^{m}(f_i^k)_{\boldsymbol{0}}\bar{v}_i)\\ \text{s.t.} & \langle\boldsymbol{X}_k,\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{a}}^k\rangle+\langle\boldsymbol{Z}_k,\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{a}}^k\rangle-\sum_{i=1}^{m}(f_i^k)_{\boldsymbol{a}}\bar{v}_i=(f_0^k)_{\boldsymbol{a}}\quad(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})\\ & \boldsymbol{X}_k,\boldsymbol{Z}_k\succeq\boldsymbol{O}\quad(k=1,\dots,\ell).\end{array}\right.$$

ここで, X_{11}^k は $\boldsymbol{X}_k$ の, Z_{11}^k は $\boldsymbol{Z}_k$ の第 $(1,1)$ 成分である．また, $(f_i^k)_{\boldsymbol{a}}$ は, $\boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{x}_k)$ の第 i 成分の多項式 $f_i^k(\boldsymbol{x}_k)$ において, ${\boldsymbol{x}_k}^{\boldsymbol{a}}$ に対応する係数である．同様に, $(f_0^k)_{\boldsymbol{a}}$ は, 多項式 $f_0^k(\boldsymbol{x}_k)$ において, ${\boldsymbol{x}_k}^{\boldsymbol{a}}$ に対応する係数である．さらに, $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{a}}^k$ は, 行列 $\boldsymbol{u}_N(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{u}_N(\boldsymbol{x}_k)^T$ において, ${\boldsymbol{x}_k}^{\boldsymbol{a}}$ に対応する係数行列であり, $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{a}}^k$ は, 行列 $(a_k - \|\boldsymbol{x}_k\|_2^2)\boldsymbol{u}_{N-1}(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{u}_{N-1}(\boldsymbol{x}_k)^T$ において $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{a}}$ に対応する係数行列である．したがって, Lagrange 緩和問題 (20) を解くためには, ℓ 個の部分問題

$$\begin{cases} \max & -X_{11}^k - a_k Z_{11}^k + \sum_{i=1}^m (f_i^k)_{\boldsymbol{0}} \bar{v}_i \\ \text{s.t.} & \langle \boldsymbol{X}_k, \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{a}}^k \rangle + \langle \boldsymbol{Z}_k, \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{a}}^k \rangle - \sum_{i=1}^m (f_i^k)_{\boldsymbol{a}} \bar{v}_i = (f_0^k)_{\boldsymbol{a}} \quad (\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}) \\ & \boldsymbol{X}_k, \boldsymbol{Z}_k \succeq \boldsymbol{O} \end{cases}$$

を解けば良いことがわかる．

$\bar{\boldsymbol{v}} \in \mathcal{K}^*$ を固定して考えていたがこれを変数だと考えれば, 次の錐上の線型計画問題を得る．

$$\begin{cases} \max & \sum_{k=1}^{\ell} (-X_{11}^k - a_k Z_{11}^k + \sum_{i=1}^m (f_i^k)_{\boldsymbol{0}} \bar{v}_i) \\ \text{s.t.} & \langle \boldsymbol{X}_k, \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{a}}^k \rangle + \langle \boldsymbol{Z}_k, \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{a}}^k \rangle - \sum_{i=1}^m (f_i^k)_{\boldsymbol{a}} v_i = (f_0^k)_{\boldsymbol{a}} \quad (\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}) \\ & \boldsymbol{X}_k, \boldsymbol{Z}_k \succeq \boldsymbol{O} \quad (k = 1, \ldots, \ell), \boldsymbol{v} \in \mathcal{K}^*. \end{cases} \tag{21}$$

最適化問題 (21) の双対問題は次のように書ける．

$$\begin{cases} \min & \displaystyle\sum_{k=1}^{\ell} F_0^k(y_{\boldsymbol{a}}^k) \\ \text{s.t.} & -\displaystyle\sum_{k=1}^{\ell} \boldsymbol{F}^k(y_{\boldsymbol{a}}^k) \in \mathcal{K}, \boldsymbol{M}_{N_k}(y_{\boldsymbol{a}}^k) \succeq \boldsymbol{O}, \boldsymbol{M}_{N_k-1}(\theta_k y_{\boldsymbol{a}}^k) \succeq \boldsymbol{O} \quad (k = 1, \ldots, \ell) \end{cases} \tag{22}$$

ここで, $N_k \geq \max\{\lceil \deg f_0^k/2 \rceil, \ldots, \lceil \deg f_m^k/2 \rceil\}$ を満たす自然数である．$F_0^k(y_{\boldsymbol{a}}^k)$ は, $f_0^k(\boldsymbol{x}_k)$ を線形化した関数であり, 同様に $\boldsymbol{F}^k(y_{\boldsymbol{a}}^k)$ は, $\boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{x}_k)$ を線形化したものである．また, $\boldsymbol{M}_{N_k}(y_{\boldsymbol{a}}^k)$ は $\boldsymbol{M}_{N_k}(\boldsymbol{x}_k)$ を, $\boldsymbol{M}_{N_k-1}(\theta_k y_{\boldsymbol{a}}^k)$ は $\boldsymbol{M}_{N_k-1}(\theta_k \boldsymbol{x}_k)$ を, それぞれ線形化したものである．したがって, この錐上の線型計画問題 (22) は, 多項式計画 (19) において, $\boldsymbol{M}_{N_k}(\boldsymbol{x}_k) \succeq \boldsymbol{O}$ と, $\boldsymbol{M}_{N_k-1}(\theta_k \boldsymbol{x}_k) \succeq \boldsymbol{O}$ を追加して構成したものと理解できる．

次に, 定理 3.1 と類似する性質を導く．最適化問題 (21) において N は, $N = \max_{k=1,\ldots,\ell} N_k$ を満たすように選ばれる．そこで, この最適化問題 (21) の最適値を p_N^*, Lagrange 双対問題の最適値を p^* とおけば, 次の定理が成立する．

定理 4.2 多項式計画 *(19)* が実行可能内点解を持つとき, $\lim_{N\to\infty} p_N^* = p^*$ が成立する．

提案した緩和を (19) に適用するためには, 全ての変数 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_\ell$ で構成される $\boldsymbol{M}_N(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_\ell) \succeq \boldsymbol{O}$ と, $\boldsymbol{M}_{N-1}(\theta \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_\ell) \succeq \boldsymbol{O}$ を追加していたが, (22) から, $\boldsymbol{M}_N(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_\ell)$ の主座小行列に対応する $\boldsymbol{M}_{N_k}(\boldsymbol{x}_k)$ と, $\boldsymbol{M}_{N_k-1}(\theta \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_\ell)$ の主座小行列に対応する $\boldsymbol{M}_{N-1}(\theta_k \boldsymbol{x}_k)$ が半正定値であるという制約を加えて緩和問題を構成しても定理 3.1 と類似する定理 4.2 が成立することが言える．したがって, 分離可能な多項式計画 (19) から, よりサイズの小さい緩和問題 (22) を構成できることがわかる．

定理 4.2 の証明: 定理 3.1 の証明より, p^* は有限値をとることと

$$p_N^* \leq p_{N-1}^* \leq p^* \quad (\forall N \geq \max_{k=1,\ldots,\ell} \max\{\lceil \deg f_0^k/2 \rceil, \ldots, \lceil \deg f_m^k/2 \rceil\})$$

がわかる．したがって, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$p^* - \varepsilon < p^*_{N'} \quad (\forall N \geq N')$$

となる整数 N' が存在することを示せば良い.

p^* の sup の定義より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$p^* - \varepsilon < \inf_{(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_\ell)\in B_{\boldsymbol{a}}} L(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_\ell,\bar{\boldsymbol{v}}) = \sum_{k=1}^{\ell} \inf_{\boldsymbol{x}_k \in B_{a_k}} L_k(\boldsymbol{x}_k,\bar{\boldsymbol{v}})$$

となる $\bar{\boldsymbol{v}} \in \mathcal{K}^*$ が存在する．$\eta_k = \inf_{\boldsymbol{x}_k\in B_{a_k}} L_k(\boldsymbol{x}_k,\bar{\boldsymbol{v}})$ とおけば,

$$p^* - \varepsilon < \sum_{k=1}^{\ell} \eta_k$$

である．ここで, $\delta = \sum_{k=1}^{\ell} \eta_k - (p^* - \varepsilon)$ とおく．

$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}^*) - (p^* - \varepsilon) \quad = \quad \sum_{k=1}^{\ell} (L_k(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{v}^*) - (\eta_k - \delta/k)) > 0 \quad (\forall \boldsymbol{x}_k \in B_{a_k}, k = 1,\ldots,\ell),$$

が成り立つ．ところで, η_k の定義から, 全ての k に関して $L_k(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{v}^*) - (\eta_k - \delta/k) > 0 \quad (\forall \boldsymbol{x}_k \in B_{a_k})$ が成り立つので, [7] の補題 4.1 より,

$$L_k(\boldsymbol{x}_k,\bar{\boldsymbol{v}}) - (\eta_k - \delta/k) = s_k(\boldsymbol{x}_k)^2 + (a_k - \|\boldsymbol{x}_k\|_2^2) t_k(\boldsymbol{x}_k)^2 \quad (\forall \boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^{n_k}, k = 1,\ldots,\ell)$$

となる自然数 $\bar{N}_k$, 次数が $\bar{N}_k$ 以下の多項式 $s_k(\boldsymbol{x}_k)$ と次数が $\bar{N}_k - 1$ 以下の多項式 $t_k(\boldsymbol{x}_k)$ が存在する．$s_k(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{s}_k^T \boldsymbol{u}_{\bar{N}_k}(\boldsymbol{x}_k)$, $t_k(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{t}_k^T \boldsymbol{u}_{\bar{N}_k-1}(\boldsymbol{x}_k)$ とおけば, この恒等式は,

$$\begin{aligned} L_k(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{v}^*) - (\eta_k - \delta/k) \quad = \quad & (a_k - \|\boldsymbol{x}_k\|_2^2)\langle \boldsymbol{t}_k\boldsymbol{t}_k^T, \boldsymbol{u}_{\bar{N}_k-1}(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{u}_{\bar{N}_k-1}(\boldsymbol{x}_k)^T\rangle \\ & + \langle \boldsymbol{s}_k\boldsymbol{s}_k^T, \boldsymbol{u}_{\bar{N}_k}(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{u}_{\bar{N}_k}(\boldsymbol{x}_k)^T\rangle \quad (\forall \boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^{n_k}, k = 1,\ldots,\ell) \end{aligned}$$

となる．このとき, $\boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{s}_k\boldsymbol{s}_k^T$, $\boldsymbol{Z}_k = \boldsymbol{t}_k\boldsymbol{t}_k^T$, $\boldsymbol{v} = \bar{\boldsymbol{v}}$ は, $N' = \max\{\bar{N}_1,\ldots,\bar{N}_\ell\}$ で構成される錐上の線型計画問題 (21) の実行可能解である．したがって, (21) の目的関数値は, $\sum_{k=1}^{\ell}\eta_k - \delta = p^* - \varepsilon$ 以上であることがわかる．以上から, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$p^* - \varepsilon \leq p^*_N \leq p^* \quad (\forall N \geq N')$$

を満たす N' が存在する． ∎

5 補題 3.2 の証明

補題 3.2 を証明するために, 次の補題を用いる.

補題 5.1 $f(\boldsymbol{x}) \not\equiv 0$ である多変数多項式 f は, 任意の点 $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\|\boldsymbol{x}' - \tilde{\boldsymbol{x}}\| < \varepsilon$ となる $\boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^n$ が存在して, $f(\boldsymbol{x}') \neq 0$ が成立する.

証明: $f(\boldsymbol{x}) \not\equiv 0$ より, $f(\tilde{\boldsymbol{x}}) \neq 0$ となる $\tilde{\boldsymbol{x}}$ が存在する. ここで,

$$g_1(x) = f(x, \tilde{x_2}, \ldots, \tilde{x_n})$$

とおく. この時, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$g_1(x_1') \neq 0 \text{ かつ } 0 < |x_1' - \bar{x_1}| < \varepsilon/\sqrt{n}$$

となる x_1' が存在する. 次に,

$$h(x) = f(x_1', x, \tilde{x_3}, \ldots, \tilde{x_n})$$

とおくと, やはり, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$g_2(x_2') \neq 0 \text{ かつ } 0 < |x_2' - \bar{x_2}| < \varepsilon/\sqrt{n}$$

となる x_2' が存在する. これを繰り返せば, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $f(x_1', \ldots, x_n') \neq 0$ と $0 < \|\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}'\| < \varepsilon$ を満たす $\boldsymbol{x}'$ を構成できる.

∎

補題 3.2 の証明: $n_1 = \binom{n+N}{n}$, $n_2 = \binom{n+N-1}{n}$, $S_1 = \{\boldsymbol{q}_1 \in \mathbb{R}^{n_1} \mid \|\boldsymbol{q}_1\| = 1\}$, $S_2 = \{\boldsymbol{q}_2 \in \mathbb{R}^{n_2} \mid \|\boldsymbol{q}_2\| = 1\}$ とおく. $f(\bar{\boldsymbol{x}}) > 0$ より, $\|\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \bar{\varepsilon}$ を満たす全ての $\boldsymbol{x}$ で, $f(\boldsymbol{x}) > 0$ となる $\bar{\varepsilon}$ が存在する. 補題 5.1 における ε を $\bar{\varepsilon}$ とすれば, 任意の $\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2)^T \in S_1 \times S_2$ に対して

$$\boldsymbol{q}_1^T \boldsymbol{M}_N(\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{q}))\boldsymbol{q}_1 > 0, \boldsymbol{q}_2^T \boldsymbol{M}_{N-1}(\theta\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{q}))\boldsymbol{q}_2 > 0, \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{q})) > 0$$

を満たす $\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{q}) \in \mathbb{R}^n$ が存在する. ここで, $\hat{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{q}) = y(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{a})$ とおき, $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{q})$ を $y(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{a})$ を並べたベクトルとすると

$$\boldsymbol{q}_1^T \boldsymbol{M}_N(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{q}))\boldsymbol{q}_1 > 0, \boldsymbol{q}_2^T \boldsymbol{M}_{N-1}(\theta\boldsymbol{y}(\boldsymbol{q}))\boldsymbol{q}_2 > 0, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{q})) > 0$$

を得る. なお, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y})$ は $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ を線形化した関数である. $\boldsymbol{q}_1^T \boldsymbol{M}_N(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{q}))\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2^T \boldsymbol{M}_{N-1}(\theta\boldsymbol{y}(\boldsymbol{q}))\boldsymbol{q}_2$ を $\boldsymbol{q}$ の関数とみなせば, 連続関数の性質から $\boldsymbol{q} \in S$ に対して

$$\begin{array}{rcl}
\tilde{\boldsymbol{q}_1}^T \boldsymbol{M}_N(\boldsymbol{y}(\tilde{\boldsymbol{q}}))\tilde{\boldsymbol{q}_1} & > & 0 \quad (\forall \tilde{\boldsymbol{q}} = (\tilde{\boldsymbol{q}_1}, \tilde{\boldsymbol{q}_2}) \in U(\boldsymbol{q}, \delta(\boldsymbol{q}))) \\
\tilde{\boldsymbol{q}_2}^T \boldsymbol{M}_{N-1}(\theta\boldsymbol{y}(\tilde{\boldsymbol{q}}))\tilde{\boldsymbol{q}_2} & > & 0 \quad (\forall \tilde{\boldsymbol{q}} = (\tilde{\boldsymbol{q}_1}, \tilde{\boldsymbol{q}_2}) \in U(\boldsymbol{q}, \delta(\boldsymbol{q})))
\end{array}$$

となる近傍 $U(\boldsymbol{q}, \delta(\boldsymbol{q}))$ が存在する. $S_1 \times S_2$ は有界閉集合なので,

$$S_1 \times S_2 \subset \bigcup_{i=1}^{K} U(\boldsymbol{q}^i, \delta(\boldsymbol{q}^i))$$

を満たす K 個の $\boldsymbol{q}^i \in S$ が存在する. ここで,

$$\boldsymbol{y} = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} \boldsymbol{y}(\boldsymbol{q}^i)$$

とおけば, 任意の $\boldsymbol{q} \in S$ に対して $\boldsymbol{q} \in U(\boldsymbol{q}^i, \delta(\boldsymbol{q}^i))$ となる, $\boldsymbol{q}^i$ が存在するので

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{q}_1^T \boldsymbol{M}_N(y_{\boldsymbol{a}}) \boldsymbol{q}_1^T & > & 0 \quad (\forall \boldsymbol{q}_1 \in S_1) \\ \boldsymbol{q}_2^T \boldsymbol{M}_{N-1}(\theta y_{\boldsymbol{a}}) \boldsymbol{q}_2^T & > & 0 \quad (\forall \boldsymbol{q}_2 \in S_2) \\ \boldsymbol{F}(y_{\boldsymbol{a}}) & = & \displaystyle\frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{q}^i)) > 0 \end{array}$$

が成立する. したがって, $\boldsymbol{y}$ は, 緩和問題 (3) において実行可能内点解になる. この事実と [4] より, 強双対定理が成立する. ∎

6 おわりに

本論文では, 錐上の多項式計画に対する緩和法を提案し, Lasserre が提案した緩和よりも緩和問題のサイズが小さくなることと, N を十分大きくとることで Lagrange 双対問題の最適値に収束することを示した. また, 特徴的な構造を持った場合は, 多項式計画の最適値に収束することや, 緩和問題のサイズをさらに小さくできることを示した.

今後の課題としては, 凸多項式計画 (5) においては, ある N で最適値と等しくなるかどうか, また, 多項式計画 (5) において, 制約式 $\boldsymbol{x} \in B_a$ を除いても定理 3.1 同様な定理が成立するかどうかなどがあげられる.

参考文献

[1] M. Kojima, S. Kim, and H. Waki. A general framework for convex relaxation of polynomial optimization problems over cones. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 46, No. 2, pp. 125–144, March 2003.

[2] J. B. Lasserre. Global optimization with ploynomials and the problem of moments. *SIAM Journal on Optimization*, Vol. 11, No. 3, pp. 796–817, 2001.

[3] J. B. Lasserre. An explicit equivalent positive semidefinite program for nonlinear 0-1 programs. *SIAM Journal on Optimization*, Vol. 12, No. 3, pp. 756–769, 2002.

[4] Y. E. Nesterov and A. Nemirovskii. *Interior Point Polynomial Methods for Convex Programming: Theory and Applications*. SIAM, Philadelphia, 1994.

[5] P. A. Parrilo. Semidefinite programming relaxations for semialgebraic problems. *Mathematical Programming*, Vol. B-96, pp. 293–320, 2003.

[6] P. A. Parrilo and B. Sturmfels. Minimizing polynomial functions. In *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, Vol. 60, pp. 83–99, 2003.

[7] M. Putinar. Positive polynomials on compact semi-algebraic sets. *Indiana University Mathematics Journal*, Vol. 42, No. 3, pp. 969–984, 1993.