多項式最適化問題に対する2乗多項式緩和

東京工業大学 情報理工学研究科

数理・計算科学専攻

小島政和

第23回理財工学研究センター主催　科研費シンポジウム

2006年11月16（木） ー 17日（金）

発表資料：http://www.is.titech.ac.jp/~kojima/talkJ.html

研究の目的＝”凸性を持たない問題の大域的最適化

大規模問題を解くためのデータの疎性の活用の有効性

目次

1．多項式最適化問題(Polynomial Optimization Problem)
2．非負多項式と2乗多項式(Sum of Squares)
3. 制約の付かないPOPに対するSOS 緩和
4．不等式条件付きPOPに対するSOS 緩和
5．数値計算例
6．まとめ

研究の目的＝”凸性を持たない問題の大域的最適化

大規模問題を解くためのデータの疎性の活用の有効性

目次

$\mathbb{R}^n$: n-次元 Euclid 空間，n-次元ベクトルの空間.

$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$: ベクトル変数.

$f_j(x)$: $x \in \mathbb{R}^n$ に関する n 変数多項式 $(j = 0, 1, \ldots, m)$.

$\boxed{\text{多項式最適化問題(POP): min } f_0(x) \text{ sub.to } f_j(x) \geq 0 \ (j = 1, \ldots, m).}$

例. $n = 3$

$$
\begin{array}{rl}
\min & f_0(x) \equiv x_1^3 - 2x_1x_2^2 + x_1^2x_2x_3 - 4x_3^2 \\
\text{sub.to} & f_1(x) \equiv -x_1^2 + 5x_2x_3 + 1 \geq 0, \\
& f_2(x) \equiv x_1^2 - 3x_1x_2x_3 + 2x_3 + 2 \geq 0, \\
& f_3(x) \equiv -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 1 \geq 0.
\end{array}
$$

$x_1(x_1 - 1) = 0$ (0-1 整数条件),

$x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_2x_3 = 0$ (相補性条件).

- 多項式最適化問題(POP)の記述力は高い.
- 非線形最適化+組合せ最適化分野での大域的最適化の数理モデル.

半正定値計画緩和に対する２種類のアプローチ [1], [2]

$$\text{POP:}\quad \min\ f_0(x)\quad \text{sub.to}\quad f_i(x) \geq 0\ (i = 1,\ldots,m),$$

POP	⇒	一般化 Lagrange 双対問題 (緩和)
⇓ LMI 妥当不等式の追加	双対	⇓
POP SDP の "無限列"		⇓ SOS 緩和の "無限列"
⇓ 線形化	双対	⇓
SDP(緩和) も "無限列" [1]	⇔	SDP(緩和) の "無限列" [2]

[1] Lasserre, "Global optimization with polynomials and the problems of moments", *SIAM J. on Optim.* (2001).

[2] Parrilo, "Semidefinite programming relaxations for semialgebraic problems", *Math. Prog.* (2003).

(a) POP の最小値の下界.

(b) 理論的には下界はPOPの真の最小値に収束.

(c) 緩和問題はSDPとして解ける. そのサイズは, (高精度を要求するほど) "無限列" に沿って急速に増加.

(d) 実用上大規模問題に適用不可能 ⇒ 多項式の疎性の活用

半正定値計画緩和に対する２種類のアプローチ [1], [2]

$$\boxed{\text{POP:} \quad \min\ f_0(x) \quad \text{sub.to} \quad f_i(x) \geq 0\ (i = 1, \ldots, m),}$$

POP	$\Rightarrow$	一般化 Lagrange 双対問題 (緩和)
$\Downarrow$ LMI 妥当不等式の追加	双対	$\Downarrow$
POP SDP の “無限列”		$\Downarrow$ SOS 緩和の “無限列”
$\Downarrow$ 線形化	双対	$\Downarrow$
SDP(緩和) も “無限列” [1]	$\Leftrightarrow$	SDP(緩和) の “無限列” [2]

[1] Lasserre, “Global optimization with polynomials and the problems of moments”, *SIAM J. on Optim.* (2001).

[2] Parrilo, “Semidefinite programming relaxations for semialgebraic problems”, *Math. Prog.* (2003).

多項式の疎性の活用

[3] Kojima, Kim and Waki *Math. Prog.* (2005).

[4] Waki, S. Kim, Kojima and Muramatsu *SIAM J. on Optim* (2006).

[5] Waki, Kim, Kojima and Muramatsu, SparsePOP (2005).

半正定値計画緩和に対する２種類のアプローチ [1], [2]

$$\boxed{\text{POP:} \quad \min\ f_0(x) \quad \text{sub.to} \quad f_i(x) \geq 0 \ (i = 1, \ldots, m),}$$

POP	⇒	一般化 Lagrange 双対問題 (緩和)
⇓ LMI 妥当不等式の追加	双対	⇓
POP SDP の "無限列"		⇓ SOS 緩和の "無限列"
⇓ 線形化	双対	⇓
SDP(緩和) も "無限列" [1]	⇔	SDP(緩和) の "無限列" [2]

[1] Lasserre, "Global optimization with polynomials and the problems of moments", *SIAM J. on Optim.* (2001).

[2] Parrilo, "Semidefinite programming relaxations for semialgebraic problems", *Math. Prog.* (2003).

多項式 SDP および SOCP への拡張

[6] Kojima, "SOS relaxations of polynomial SDPs" (2003).

[7] Hol and Hol,"SOS relaxations of polynomial SDPs" (2004).

[8] D. Henrion and J. B. Lasserre (2005).

[9] Kojima and Muramatsu. To applear in *Math. Prog.*

2乗多項式緩和が適用出来る疎なデータを持つ多項式最適化問題(POP)例

$$\min \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_j & c_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix} x_j + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x_j x_{j+1} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x_{j+1} \succeq O,$$

(多項式行列不等式) (左辺が半正定値)

$$\left(0.3(x_k^3 + x_n) + 1\right) - \|(x_k + \beta_i, x_n)\| \geq 0 \ (j, k = 1, \ldots, n-1),$$

(2次錐不等式)

$$1 - x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_n^2 \geq 0 \ (p = 1, \ldots, n-2)$$

(通常の多項式不等式)

ただし $a_i, b_j, d_j \in (-1, 0)$, $c_j, \beta_j \in (0, 1)$ は乱数.

研究の目的＝”凸性を持たない問題の大域的最適化

大規模問題を解くためのデータの疎性の活用の有効性

目次

$$f(x)\ :\ n \text{ 変数非負多項式} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \geq 0\ (\forall x \in \mathbb{R}^n).$$

$\mathcal{N}$: n 変数非負多項式の集合.

n 変数多項式 $f(x)$: SOS (Sum of Squares of Polynomials)

$$\Updownarrow$$

$f(x)$: (複数個の) n 変数多項式の２乗和，すなわち

$$\exists \text{ 有限本の } n \text{ 変数多項式 } g_1(x), \ldots, g_k(x);\ f(x) = \sum_{i=1}^{k} g_i(x)^2.$$

Σ : n 変数 SOS の集合. $\Sigma_{2r} \subset \Sigma$: 高々 r 次の n 変数多項式の２乗和.

例. $n = 2$. $f(x) = (x_1^2 - 2x_2 + 1)^2 + (3x_1x_2 + x_2 - 4)^2 \in \Sigma_4$.

例. $n = 2$. $f(x_1, x_2) = (x_1x_2 - 1)^2 + x_1^2 \in \Sigma_4$.

$\inf\{f(x_1, x_2) : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\} = 0; 0 < x_1 \to 0,\ x_2 = 1/x_1,$

$\not\exists$最小点

$$f(x) \ : \ n \text{ 変数非負多項式} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \geq 0 \ (\forall x \in \mathbb{R}^n).$$

$\mathcal{N}$: n 変数非負多項式の集合.

$$n \text{ 変数多項式 } f(x) \ : \ \text{SOS (Sum of Squares of Polynomials)}$$

$$\Updownarrow$$

$f(x)$: (複数個の) n 変数多項式の２乗和，すなわち

$$\exists \text{ 有限本の } n \text{ 変数多項式 } g_1(x), \ldots, g_k(x);\ f(x) = \sum_{i=1}^{k} g_i(x)^2.$$

Σ : n 変数 SOS の集合. $\Sigma_{2r} \subset \Sigma$: 高々 r 次の n 変数多項式の２乗和.

- 理論的には，$\Sigma \subset \mathcal{N}$，$\Sigma \neq \mathcal{N}$.
- ただし，$f(x) \notin \Sigma$ なる $f(x) \in \mathcal{N}$ は稀少.
- 実用的上これを同一視する $\Longrightarrow$ Sums of Squares Optimization, Relaxation.
- $n = 1$ のときは，$\Sigma = \mathcal{N}$. $\forall n \geq 1$ で，２次 n 変数非負多項式の集合 $= \Sigma_2$.

研究の目的＝”凸性を持たない問題の大域的最適化

大規模問題を解くためのデータの疎性の活用の有効性

目次

$$\mathcal{P}\text{:}\quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} \ f(x) \ \text{(ただし } f(x) \text{ は } x \in \mathbb{R}^n \text{ に関する } 2r \text{ 次 } n \text{ 変数多項式)}$$

$$\Downarrow$$

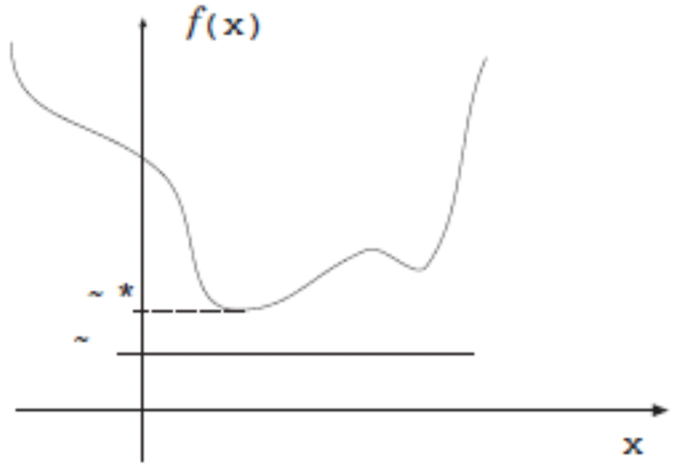
半無限計画

$$\mathcal{P}\text{'}\text{:}\ \max\ \zeta \quad \text{sub.to} \quad f(x) - \zeta \geq 0 \ (\forall x \in \mathbb{R}^n)$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x) - \zeta \in \mathcal{N} \ (n \text{ 変数非負多項式の集合})$$

ここで，x は変数ではない！ 無限個の不等式を記述するインデックス．



$$\mathcal{P}: \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} \ f(x)$$ (ただし $f(x)$ は $x \in \mathbb{R}^n$ に関する $2r$ 次 n 変数多項式)

$\Downarrow$

半無限計画

$\mathcal{P}$': $\max\ \zeta$ sub.to $f(x) - \zeta \geq 0$ $(\forall x \in \mathbb{R}^n)$

$\Updownarrow$

$f(x) - \zeta \in \mathcal{N}$ (n 変数非負多項式の集合)

ここで，x は変数ではない！ 無限個の不等式を記述するインデックス.

$\Sigma_{2r} \subset \Sigma \subset \mathcal{N}$ $\Downarrow$ $\mathcal{P}'$ の部分問題 $=$ $\mathcal{P}$ の緩和

$\mathcal{P}$": $\max\ \zeta$ sub.to $f(x) - \zeta \in \Sigma_{2r}$ (高々 r 次の n 変数多項式の２乗和)

$\mathcal{P}$ の最小値 $=$ $\mathcal{P}'$ の最大値 $\geq$ $\mathcal{P}$" の最大値

$\Downarrow$

SDP (半正定値計画問題) に帰着 —- この講演では述べない

研究の目的＝”凸性を持たない問題の大域的最適化

大規模問題を解くためのデータの疎性の活用の有効性

目次

$$\boxed{\text{POP:}\ \ \min\ f_0(x)\ \ \text{sub.to}\ \ f_j(x) \geq 0\ (j = 1, \ldots, m).}$$

- POPに対する2乗多項式緩和の概略

“一般化 Lagrangian Dual”

+

“制約条件の付かない POPs” に対する2乗多項式緩和

⇓

POPに対する2乗多項式緩和

- Exploiting sparsity in SOS relaxation of POP

$$\text{POP:}\quad \min\ f_0(x)\quad \text{sub.to}\quad f_j(x) \geq 0\ (j = 1, \ldots, m).$$

疎性の活用：$f_j(x)$ は x_i $(i \in C_j \subset N)$ だけしか含まない $(j = 1, \ldots, n)$.

一般化 Lagrangian 関数

$$L(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f_0(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(x) f_j(x)$$

for $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda_j \in$ 2乗多項式

$\mathbb{R} \ni \lambda_j \geq 0 \Rightarrow$ L は通常の Lagrangian 関数.

一般化 Lagrangian 双対問題

$$\max_{\lambda_1 \in 2\text{乗多項式}, \ldots, \lambda_m \in 2\text{乗多項式}}\ \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$$

$$\Updownarrow$$

一般化 Lagrangian 双対問題

$$\max\ \zeta\ \text{s.t.}\ L(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) - \zeta \geq 0\ (\forall x \in \mathbb{R}^n),$$

$$\lambda_1 \in 2\text{乗多項式}, \ldots, \lambda_m \in 2\text{乗多項式}$$

$\text{POP}: \ \min \ f_0(x) \ \ \text{sub.to} \ \ f_j(x) \geq 0 \ (j = 1, \ldots, m).$

疎性の活用：$f_j(x)$ は x_i $(i \in C_j \subset N)$ だけしか含まない $(j = 1, \ldots, n)$.

一般化 Lagrangian 関数

$$L(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f_0(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(x) f_j(x)$$

for $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda_j \in$ 2乗多項式

$\mathbb{R} \ni \lambda_j \geq 0 \ \Rightarrow$ L は通常の Lagrangian 関数.

一般化 Lagrangian 双対問題

$$\max \ \zeta \ \text{s.t.} \ L(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) - \zeta \geq 0 \ (\forall x \in \mathbb{R}^n),$$
$$\lambda_1 \in \text{2乗多項式}, \ldots, \lambda_m \in \text{2乗多項式}$$

$\Downarrow$ sparse SOS 緩和

$$\max \ \zeta \ \text{s.t.} \ L(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) - \zeta \in \ \text{2乗多項式}$$
$$\lambda_1 \in \Sigma_1, \ldots, \lambda_m \in \Sigma_m.$$

- ただし $\Sigma_j \subset$ 2乗多項式：x_i $(i \in C_j)$ だけの2乗多項式

$\Rightarrow L(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) - \zeta$：構造を持った疎性.

例

$$
\begin{array}{rl}
\min & f_0(x) = -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \\
\text{s.t} & f_1(x_1,x_2) = -x_1^4 - 2x_2^2 + 1 \geq 0,\ f_2(x_2,x_3) = -3x_2^4 - 4x_3^2 + 1 \geq 0, \\
& f_3(x_3,x_4) = -x_3^4 - 3x_4^2 - 1 \geq 0,\ f_4(x_4,x_5) = -2x_4^4 - x_5^2 - 1 \geq 0.
\end{array}
$$

一般化 Lagrangian 関数

$$
\begin{aligned}
& L(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \\
& = f_0(x) - \lambda_1(x_1,x_2) f_1(x_1,x_2) - \lambda_2(x_2,x_3) f_2(x_3,x_4) \\
& \quad -\lambda_3(x_3,x_4) f_3(x_3,x_4) - \lambda_4(x_4,x_5) f_4(x_4,x_5).
\end{aligned}
$$

ただし， $\lambda_j \in$ 2乗多項式.

このとき $L(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ の疎性パターンは

$$
H = \begin{pmatrix}
\star & \star & 0 & 0 & 0 \\
\star & \star & \star & 0 & 0 \\
0 & \star & \star & \star & 0 \\
0 & 0 & \star & \star & \star \\
0 & 0 & 0 & \star & \star
\end{pmatrix}.
$$

$L(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) - \zeta$: スパースなCholesky分解が可能！

まとめ

$$\boxed{\textbf{POP:}\quad \min\ f_0(x)\quad \text{sub.to}\quad f_i(x) \geq 0\ (i = 1, \ldots, m),}$$

Lagrange 関数 : $L(x, w) = f_0(x) - w_1 f_1(x) \cdots - w_m f_(x)$

$w_j \geq 0$ を $\varphi_j \in \Sigma_{2r}$ で置き換え

一般化 Lagrange 関数 : $L(x, \varphi) = f_0(x) - \varphi_1(x) f_1(x) \cdots - \varphi_m(x) f_(x)$

POP	$\Rightarrow$	一般化 Lagrange 双対問題(緩和)
$\Downarrow$ LMI 妥当不等式の追加	双対	$\Downarrow$
POP SDP(等価)		$\Downarrow$ SOS 緩和
$\Downarrow$ 線形化	双対	$\Downarrow$
SDP(緩和) Lasserre [3]	$\Leftrightarrow$	SDP(緩和) Parrilo [2]

[1] Lasserre, "Global optimization with polynomials and the problems of moments", *SIAM J. on Optim.* (2001).

[2] Parrilo, "Semidefinite programming relaxations for semialgebraic problems", *Math. Prog.* (2003).

+ 多項式の疎性の活用 $\Longrightarrow$ 大規模問題への適用

研究の目的＝”凸性を持たない問題の大域的最適化

大規模問題を解くためのデータの疎性の活用の有効性

目次

1．多項式最適化問題(Polynomial Optimization Problem)
2．非負多項式と2乗多項式(Sum of Squares)
3. 制約の付かないPOPに対するSO 緩和
4．不等式条件付きPOPに対するSO 緩和
5．数値計算例
6．まとめ

数値実験結果

ソフトウェア

- SparsePOP (Waki-Kim-Kojima-Muramatsu, 2005)
  — MATLAB program for constructing sparse and dense
  SDP relaxation problems.
- SeDuMi to solve SDPs.

ハードウェア

- 2.4GHz Xeon cpu with 6.0GB memory.

G.Rosenbrock 関数の最小化:

$$f(x) = \sum_{i=2}^{n} \left(100(x_i - x_{i-1}^2)^2 + (1 - x_i)^2\right)$$

- $\mathbb{R}^n$ 上で２つの最小解が存在: $x_1 = \pm 1,\ x_i = 1\ (i \geq 2)$.
- Add $x_1 \geq 0 \Rightarrow$ 最小解をつに限定.

		cpu in sec.	
n	ϵ_{obj}	Sparse	Dense
10	2.5e-08	0.2	10.6
15	6.5e-08	0.2	756.6
200	5.2e-07	2.2	—
400	2.5e-06	3.7	—
800	5.5e-06	6.8	—

$$\epsilon_{\mathrm{obj}} = \frac{|\text{最小値の下界} - \text{近似最小解}|}{\max\{1, |\text{最小値の下界}|\}}.$$

最適制御からの単純な例 (Coleman et al. 1995)

$$\left.\begin{array}{l}\min\ \dfrac{1}{M}\displaystyle\sum_{i=1}^{M-1}\left(y_i^2+x_i^2\right)\\ \text{s.t.}\quad y_{i+1}=y_i+\dfrac{1}{M}(y_i^2-x_i),\quad (i=1,\ldots,M-1),\quad y_1=1.\end{array}\right\}$$

M	# of variables	ϵ_{obj}	ϵ_{feas}	cpu
600	1198	3.4e-08	2.2e-10	3.4
700	1398	2.5e-08	8.1e-10	3.3
800	1598	5.9e-08	1.6e-10	3.8
900	1798	1.4e-07	6.8e-10	4.5
1000	1998	6.3e-08	2.7e-10	5.0

$$\epsilon_{\text{obj}}=\frac{|\text{最小値の下界}-\text{近似最小解}|}{\max\{1,|\text{最小値の下界}|\}}.$$

$\epsilon_{\text{feas}}=$ 等式制約の誤差,

cpu : 計算時間（秒）

alkyl.gms : globallib からのベンチマーク問題

$$
\begin{array}{ll}
\min & -6.3x_5x_8 + 5.04x_2 + 0.35x_3 + x_4 + 3.36x_6 \\
\text{sub.to} & -0.820x_2 + x_5 - 0.820x_6 = 0, \\
& 0.98x_4 - x_7(0.01x_5x_{10} + x_4) = 0, \\
& -x_2x_9 + 10x_3 + x_6 = 0, \\
& x_5x_{12} - x_2(1.12 + 0.132x_9 - 0.0067x_9^2) = 0, \\
& x_8x_{13} - 0.01x_9(1.098 - 0.038x_9) - 0.325x_7 = 0.574, \\
& x_{10}x_{14} + 22.2x_{11} = 35.82, \\
& x_1x_{11} - 3x_8 = -1.33, \\
& \text{lbd}_i \leq x_i \leq \text{ubd}_i \ (i = 1, 2, \ldots, 14).
\end{array}
$$

		Sparse			Dense (Lasserre)		
問題名	n	ϵ_{obj}	ϵ_{feas}	cpu	ϵ_{obj}	ϵ_{feas}	cpu
alkyl	14	5.6e-10	2.0e-08	23.0	out of memory		

$$
\epsilon_{\text{obj}} = \frac{|\text{最小値の下界} - \text{近似最小解}|}{\max\{1, |\text{最小値の下界}|\}}.
$$

ϵ_{feas} = 等式制約の誤差,

cpu : 計算時間（秒）

globallib からのベンチマーク問題

		Sparse			Dense (Lasserre)		
問題名	n	ϵ_{obj}	ϵ_{feas}	cpu	ϵ_{obj}	ϵ_{feas}	cpu
ex3_1_1	8	6.3e-09	4.7e-04	5.5	0.7e-08	2.5e-03	597.8
st_bpaf1b	10	3.8e-08	2.8e-08	1.0	4.6e-09	7.2e-10	1.7
st_e07	10	0.0e+00	8.1e-05	0.4	0.0e+00	8.8e-06	3.0
st_jcbpaf2	10	1.1e-07	0.0e+00	2.1	1.1e-07	0.0e+00	2.0
ex2_1_3	13	5.1e-09	3.5e-09	0.5	1.6e-09	1.5e-09	7.7
ex9_1_1	13	0.0	4.5e-06	1.5	0.0	9.2e-07	7.7
ex9_2_3	16	0.0e+00	5.7e-06	2.3	0.0e+00	7.5e-06	49.7
ex2_1_8	24	1.0e-05	0.0e+00	304.6	3.4e-06	0.0e+00	1946.6
ex5_2_2_c1	9	1.0e-2	3.2e+01	1.8	1.6e-05	2.1e-01	2.6
ex5_2_2_c2	9	1.0e-02	7.2e+01	2.1	1.3e-04	2.7e-01	3.5

- ex5_2_2_c1 and ex5_2_2_c2 — Dense のほうがよい
- ex5_2_2_c1 and ex5_2_2_c2 をのぞいて Sparse は Dense とほぼ同等の近似最小解を計算している.
- 規模の大きな問題では Sparse は Dense より速い.

多項式 SDP (dense) の例

$$\begin{aligned} &\min \sum_{j=1}^{n} a_i x_i \\ &\text{s.t.}\quad I - \text{“}k \times k \text{ 対称行列を係数とする次数3の多項式”} \succeq O, \\ &\qquad (\text{多項式行列不等式}) \qquad\qquad (\text{左辺が半正定値}) \\ &\qquad 0 \leq x_j \leq 1 \ (j = 1, \ldots, n). \end{aligned}$$

ただし, I は $k \times k$ 単位行列.

n	k	cpu sec.	ϵ_{obj}	ϵ_{feas}	SDP size size of A, SeDuMi	# of nonzeros
7	5	19.6	2.0-09	6.9-10	791×22,608	41,587
8	5	103.3	2.4e-09	4.0e-10	1, 286×39,006	69,772
9	5	212.7	6.4e-10	1.2e-10	2,001×63,959	109,169
10	5	828.9	6.8e-10	1.8e-10	3002×100,385	171,895
7	10	23.4	2.8e-10	3.0e-10	791×27,408	75,502
7	20	38.2	3.3e-10	6.0e-09	791×46,608	210,532
7	40	123.0	2.6e-09	4.1e-08	791×123,408	749,392

疎なデータを持つ多項式 SDP-SOCP 最適化問題の例

$$\min \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_j & c_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix} x_j + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x_j x_{j+1} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x_{j+1} \succeq O,$$

(多項式行列不等式) (左辺が半正定値)

$$\left(0.3(x_k^3 + x_n) + 1\right) - \|(x_k + \beta_i, x_n)\| \geq 0 \ (j, k = 1, \ldots, n-1),$$

(2次錐不等式)

$$1 - x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_n^2 \geq 0 \ (p = 1, \ldots, n-2)$$ (多項式不等式)

ただし $a_i, b_j, d_j \in (-1, 0)$, $c_j, \beta_j \in (0, 1)$ は乱数.

n	cpu sec.	ϵ_{obj}	ϵ_{feas}	SDP size size of A, SeDuMi	# of nonzeros
600	25.7	4.0e-12	0.0	11,974 × 113,022	235,612
800	34.8	3.2e-12	0.0	15,974 × 150,822	314,412
1000	44.5	1.6e-12	0.0	19,974 × 188,622	393,212

研究の目的＝”凸性を持たない問題の大域的最適化

大規模問題を解くためのデータの疎性の活用の有効性

目次

- **Lasserre's の (dense) SDP 緩和**
  — 理論的な収束．しかし，問題の規模の増加に伴って計算時間が指数的に増大
- **Sparse SDP relaxation**
  = **Lasserre's の (dense) SDP 緩和** + 多項式の疎性の活用
  — 理論的な収束，かつ，計算時間を縮小 ⇒ 大規模問題への適用．
- 今後の課題
  - 多項式の疎性のさらなる活用
  - 大規模 **SDP** の高速な解法
  - **POP** から生じる **SDP** 問題の数値的な不安定性の解消
  - 規模の大きな多項式 **SDP** への適用

この発表資料:

http://www.is.titech.ac.jp/∼kojima/talk.html

ご清聴ありがとうございました!