多項式最適化問題に対する２乗多項式緩和

東京工業大学　情報理工学研究科

数理・計算科学専攻

小島政和

モデルベース統合化システム設計を支える数理
- 数値・数式ハイブリッド計算・最適化の新展開 -

２００８年9月3日

目標＝“凸性を持たない問題の大域的最適化”

大規模な問題を解くための疎なデータの有効活用
— 数値実験を通して

内容

1. 多項式最適化問題 (POP)
2. 非負多項式と SOS (Sums of Squares of Polynomials).
3. 制約条件の付かない多項式最適化問題 (POP) に対する SOS 緩和
4. 不等式条件付き多項式最適化問題 (POP) に対する SOS 緩和
5. 数値計算結果
6. 終わりに

目標＝“凸性を持たない問題の大域的最適化”

大規模な問題を解くための疎なデータの有効活用
— 数値実験を通して

内容

1. 多項式最適化問題 (POP)
2. 非負多項式と SOS (Sums of Squares of Polynomials).
3. 制約条件の付かない多項式最適化問題 (POP) に対する SOS 緩和
4. 不等式条件付き多項式最適化問題 (POP) に対する SOS 緩和
5. 数値計算結果
6. 終わりに

$\mathbb{R}^n$: n-次元 Euclid 空間, n-次元ベクトルの空間.
$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$: ベクトル変数.
$f_j(\boldsymbol{x})$: $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に関する n 変数多項式 $(j = 0, 1, \ldots, m)$.

POP: min $f_0(\boldsymbol{x})$ sub.to $f_j(\boldsymbol{x}) \geq 0$ $(j = 1, \ldots, m)$

例. $n = 3$

$$\begin{array}{rl} \text{min} & f_0(\boldsymbol{x}) \equiv x_1^3 - 2x_1x_2^2 + x_1^2x_2x_3 - 4x_3^2 \\ \text{sub.to} & f_1(\boldsymbol{x}) \equiv -x_1^2 + 5x_2x_3 + 1 \geq 0, \\ & f_2(\boldsymbol{x}) \equiv x_1^2 - 3x_1x_2x_3 + 2x_3 + 2 \geq 0, \\ & f_3(\boldsymbol{x}) \equiv -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 1 \geq 0. \\ & x_1(x_1 - 1) = 0 \text{ (0-1 整数条件)}, \\ & x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_2x_3 = 0 \text{ (相補性条件)}. \end{array}$$

- 多項式最適化問題 (POP) の記述力は高い.
- 非線形最適化+組合せ最適化での大域的最適化の数理モデル.

半正定値計画緩和に対する２種類のアプローチ [1], [2]

$$\text{POP:} \quad \min \quad f_0(\boldsymbol{x}) \quad \text{sub.to} \quad f_i(\boldsymbol{x}) \geq \mathbf{0} \ (i = 1, \ldots, m),$$

POP $\Rightarrow$ 一般化 Lagrange 双対 (緩和)

$\Downarrow$ LMI 妥当不等式の追加 双対 $\Downarrow$

PSDP の "無限列" $\Downarrow$ SOS 緩和の "無限列"

$\Downarrow$ 線形化 双対 $\Downarrow$

SDP(緩和) の "無限列" [1] $\Leftrightarrow$ SDP(緩和) の "無限列" [2]

[1] Lasserre, "Global optimization with polynomials and the problems of moments", *SIAM J. on Optim.* (2001).

[2] Parrilo, "Semidefinite programming relaxations for semialgebraic problems", *Math. Prog.* (2003).

(a) POP の最小値の下界.

(b) 理論的には下界は POP の真の最小値に収束.

(c) 緩和問題は SDP として解ける．そのサイズは，(高精度を要求するほど)"無限列" に沿って急速に増加.

(d) 実用上大規模問題に適用不可能 $\Rightarrow$ 多項式の疎性の活用

半正定値計画緩和に対する２種類のアプローチ [1], [2]

POP: $\min \quad f_0(\boldsymbol{x}) \quad$ sub.to $\quad f_i(\boldsymbol{x}) \geq \mathbf{0} \ (i = 1, \ldots, m)$,

POP $\quad\Rightarrow\quad$ 一般化 Lagrange 双対 (緩和)

$\Downarrow$ LMI 妥当不等式の追加 $\quad$ 双対 $\quad \Downarrow$

PSDP の “無限列” $\quad\quad \Downarrow$ SOS 緩和の “無限列”

$\Downarrow$ 線形化 $\quad$ 双対 $\quad \Downarrow$

SDP(緩和) の “無限列” [1] $\quad\Leftrightarrow\quad$ SDP(緩和) の “無限列” [2]

[1] Lasserre, “Global optimization with polynomials and the problems of moments”, *SIAM J. on Optim.* (2001).

[2] Parrilo, “Semidefinite programming relaxations for semialgebraic problems”, *Math. Prog.* (2003).

多項式の疎性の活用

[3] Kojima, Kim and Waki *Math. Prog.* (2005)

[4] Waki, S. Kim, Kojima and Muramatsu *SIAM Opt* (2006)

[5] Waki, Kim, Kojima and Muramatsu, SparsePOP (2005)

半正定値計画緩和に対する２種類のアプローチ [1], [2]

$$\text{POP:} \quad \min \quad f_0(\boldsymbol{x}) \quad \text{sub.to} \quad f_i(\boldsymbol{x}) \geq \mathbf{0} \ (i = 1, \ldots, m),$$

POP	$\Rightarrow$	一般化 Lagrange 双対 (緩和)
$\Downarrow$ LMI 妥当不等式の追加	双対	$\Downarrow$
PSDP の “無限列”		$\Downarrow$ SOS 緩和の “無限列”
$\Downarrow$ 線形化	双対	$\Downarrow$
SDP(緩和) の “無限列” [1]	$\Leftrightarrow$	SDP(緩和) の “無限列” [2]

[1] Lasserre, “Global optimization with polynomials and the problems of moments”, *SIAM J. on Optim.* (2001).

[2] Parrilo, “Semidefinite programming relaxations for semialgebraic problems”, *Math. Prog.* (2003).

多項式 SDP および SOCP への拡張

[6] Kojima, “SOS relaxations of polynomial SDPs” (2003)

[7] Hol and Scherer, (2004)

[8] Henrion and Lasserre (2005)

[9] Kojima and Muramatsu, to applear in *Math. Prog.*

2 乗多項式緩和が適用出来る疎なデータを持つ POP の例

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_j & c_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix} x_j + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x_j x_{j+1} \succeq \boldsymbol{O},$$

(多項式行列不等式) (左辺が半正定値)

$$(0.3(x_k^3 + x_n) + 1) - \|(x_k + \beta_i, x_n)\| \geq 0 \ (j, k = 1, \ldots, n-1),$$

(2 次錐不等式)

$$1 - x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_n^2 \geq 0 \ (p = 1, \ldots, n-2)$$

(通常の多項式不等式)

ただし $a_i, b_j, d_j \in (-1, 0)$, $c_j, \beta_j \in (0, 1)$ は乱数.

目標＝“凸性を持たない問題の大域的最適化”

大規模な問題を解くための疎なデータの有効活用
— 数値実験を通して

内容

1. 多項式最適化問題 (POP)
2. 非負多項式と SOS (Sums of Squares of Polynomials).
3. 制約条件の付かない多項式最適化問題 (POP) に対する SOS 緩和
4. 不等式条件付き多項式最適化問題 (POP) に対する SOS 緩和
5. 数値計算結果
6. 終わりに

$f(\boldsymbol{x})$: n 変数非負多項式 $\Leftrightarrow$ $f(\boldsymbol{x}) \geq 0 \ (\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$.

$\mathcal{N}$: n 変数非負多項式の集合.

n 変数多項式 $f(\boldsymbol{x})$: SOS (Sum of Squares of Polynomials)

$$\Updownarrow$$

$f(\boldsymbol{x})$: (複数個の) n 変数多項式の 2 乗和，すなわち

$\exists$ 有限本の n 変数多項式 $g_1(\boldsymbol{x}), \ldots, g_k(\boldsymbol{x})$; $f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{k} g_i(\boldsymbol{x})^2$

Σ : n 変数 SOS の集合. $\Sigma_{2r} \subset \Sigma$: <u>高々 r 次の n 変数</u> SOS.

例. $n = 2$. $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - 2x_2 + 1)^2 + (3x_1x_2 + x_2 - 4)^2 \in \Sigma_4$.

例. $n = 3$. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2x_3 - 1)^2 + x_1^2 \in \Sigma_6$.

$$f(\boldsymbol{x}) \ : \ n \text{ 変数非負多項式} \quad \Leftrightarrow \quad f(\boldsymbol{x}) \geq 0 \ (\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n).$$

$\mathcal{N}$: n 変数非負多項式の集合.

n 変数多項式 $f(\boldsymbol{x})$ ： SOS (Sum of Squares of Polynomials)

$$\Updownarrow$$

$f(\boldsymbol{x})$: (複数個の) n 変数多項式の 2 乗和，すなわち

$$\exists \text{ 有限本の } n \text{ 変数多項式 } \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}), \ldots, g_k(\boldsymbol{x});\ f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{k} g_i(\boldsymbol{x})^2$$

Σ : n 変数 SOS の集合. $\Sigma_{2r} \subset \Sigma$: <u>高々 r 次の n 変数</u> SOS.

- 理論的には，$\Sigma \subset \mathcal{N}$，$\Sigma \neq \mathcal{N}$.
- ただし，$f(\boldsymbol{x}) \notin \Sigma$ なる $f(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{N}$ は稀少.
- 実用的上これを同一視する $\Rightarrow$ SOS Optimization, Relaxation.
- $n = 1$ のときは，$\Sigma = \mathcal{N}$. $\forall n \geq 1$ で，2 次 n 変数非負多項式の集合 $= \Sigma_2$.

目標＝“凸性を持たない問題の大域的最適化”

大規模な問題を解くための疎なデータの有効活用
— 数値実験を通して

内容

1. 多項式最適化問題 (POP)
2. 非負多項式と SOS (Sums of Squares of Polynomials).
3. 制約条件の付かない多項式最適化問題 (POP) に対する SOS 緩和
4. 不等式条件付き多項式最適化問題 (POP) に対する SOS 緩和
5. 数値計算結果
6. 終わりに

$\mathcal{P}$: $\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})$ ($f(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に関する $2r$ 次 n 変数多項式)

$$\Downarrow$$

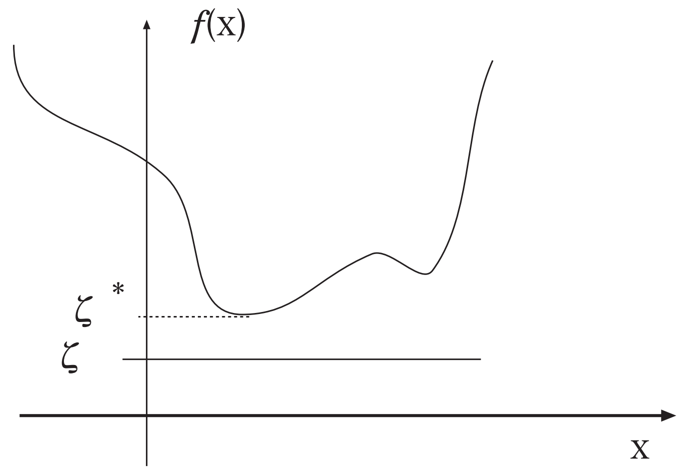
半無限計画

$\mathcal{P}$': $\max \zeta$ sub.to $f(\boldsymbol{x}) - \zeta \geq 0 \ (\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$

$$\Updownarrow$$

$f(\boldsymbol{x}) - \zeta \in \mathcal{N}$ (n 変数非負多項式の集合)

$\boldsymbol{x}$ は変数ではない！ 無限個の不等式を記述するインデックス.



$\mathcal{P}$: $\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})$ ($f(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に関する $2r$ 次 n 変数多項式)

$\Downarrow$

半無限計画

$\mathcal{P}$': $\max\ \zeta$ sub.to $f(\boldsymbol{x}) - \zeta \geq 0\ (\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$

$\Updownarrow$

$f(\boldsymbol{x}) - \zeta \in \mathcal{N}$ (n 変数非負多項式の集合)

$\Sigma_{2r} \subset \Sigma \subset \mathcal{N}$ $\Downarrow$ $\mathcal{P}'$ の部分問題 $=$ $\mathcal{P}$ の緩和

$\mathcal{P}$": $\max\ \zeta$ sub.to $f(\boldsymbol{x}) - \zeta \in \Sigma_{2r}$ (<u>高々 r 次の n 変数 SOS</u>)

$\mathcal{P}$ の最小値 $=$ $\mathcal{P}'$ の最大値 $\geq$ $\mathcal{P}$" の最大値

$\Downarrow$

SDP (半正定値計画問題) に帰着 —- この講演では述べない

目標＝“凸性を持たない問題の大域的最適化”

大規模な問題を解くための疎なデータの有効活用
— 数値実験を通して

内容

1. 多項式最適化問題 (POP)
2. 非負多項式と SOS (Sums of Squares of Polynomials).
3. 制約条件の付かない多項式最適化問題 (POP) に対する SOS 緩和
4. 不等式条件付き多項式最適化問題 (POP) に対する SOS 緩和
5. 数値計算結果
6. 終わりに

$$\text{POP:}\quad \min \quad f_0(\boldsymbol{x}) \quad \text{sub.to} \quad f_j(\boldsymbol{x}) \geq \mathbf{0}\ (j = 1, \ldots, m).$$

- POP に対する 2 乗多項式緩和の概略

“一般化 Lagrangian Dual”

$+$

“制約条件の付かない POPs” に対する 2 乗多項式緩和

$\Downarrow$

POP に対する 2 乗多項式緩和

- Exploiting sparsity in SOS relaxation of POP

POP: $\min \quad f_0(\boldsymbol{x}) \quad$ sub.to $\quad f_j(\boldsymbol{x}) \geq \mathbf{0} \ (j = 1, \ldots, m)$.

疎性：$f_j(\boldsymbol{x})$ は $x_i \ (i \in C_j \subset N)$ しか含まない $(j = 1, \ldots, n)$.

一般化 Lagrangian 関数

$$L(\boldsymbol{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \quad = \quad f_0(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(\boldsymbol{x}) f_j(\boldsymbol{x})$$
$$\text{for } \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \ \forall \lambda_j \in \text{SOS}$$

$\mathbb{R} \ni \lambda_j \geq 0 \ \Rightarrow$ L は通常の Lagrangian 関数.

一般化 Lagrangian 双対問題

$$\max \quad \zeta \text{ s.t. } \quad L(\boldsymbol{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) - \zeta \geq 0 \ (\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n),$$
$$\lambda_1 \in \text{SOS}, \ldots, \lambda_m \in \text{SOS}$$

$\Downarrow$ sparse SOS 緩和

$$\max \quad \zeta \text{ s.t. } \quad L(\boldsymbol{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) - \zeta \in \text{ SOS}$$
$$\lambda_1 \in \Sigma_1, \ldots, \lambda_m \in \Sigma_m.$$

- ただし $\Sigma_j \subset$ SOS : $x_i \ (i \in C_j)$ だけの SOS

$\Rightarrow L(\boldsymbol{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) - \zeta$: 構造を持った疎性.

$$\min\ f_0(\boldsymbol{x}) = -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \text{ s.t}$$
$$f_1(\boldsymbol{x}) = -x_1^4 - 2x_2^2 + 1 \geq 0,\ f_2(\boldsymbol{x}) = -3x_2^4 - 4x_3^2 + 1 \geq 0,$$
$$f_3(\boldsymbol{x}) = -x_3^4 - 3x_4^2 - 1 \geq 0,\ f_4(\boldsymbol{x}) = -2x_4^4 - x_5^2 - 1 \geq 0.$$

一般化 Lagrangian 関数

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \\ = \ & f_0(\boldsymbol{x}) - \lambda_1(x_1, x_2) f_1(x_1, x_2) - \lambda_2(x_2, x_3) f_2(x_3, x_4) \\ & -\lambda_3(x_3, x_4) f_3(x_3, x_4) - \lambda_4(x_4, x_5) f_4(x_4, x_5). \end{aligned}$$

ただし， $\lambda_j \in$ SOS. $L(\boldsymbol{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ の疎性パターンは

$$H = \begin{pmatrix} \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & 0 & 0 \\ 0 & \star & \star & \star & 0 \\ 0 & 0 & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & \star & \star \end{pmatrix}.$$

$L(\boldsymbol{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) - \zeta$: スパースな Cholesky 分解が可能！

まとめ

$\boxed{\text{POP:} \quad \min \quad f_0(\boldsymbol{x}) \quad \text{sub.to} \quad f_j(\boldsymbol{x}) \geq \mathbf{0} \ (j = 1, \ldots, m).}$

Lagrange 関数 : $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}) = f_0(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^m w_j f_j(\boldsymbol{x})$

$w_j \geq 0$ を $\varphi_j \in \Sigma_{2r}$ で置き換え

一般化 Lagrange 関数 : $L(\boldsymbol{x}, \varphi) = f_0(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^m \varphi_j(\boldsymbol{x}) f_j(\boldsymbol{x})$

POP $\Rightarrow$ 一般化 Lagrange 双対 (緩和)

$\Downarrow$

$\Downarrow$ SOS 緩和の "無限列"

$\Downarrow$

SDP(緩和) の "無限列" [2]

[2] Parrilo, "Semidefinite programming relaxations for semialgebraic problems", *Math. Prog.* (2003).

まとめ

POP: $\min \quad f_0(\boldsymbol{x})$ sub.to $f_j(\boldsymbol{x}) \geq \mathbf{0}\ (j = 1, \ldots, m).$

Lagrange 関数 : $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}) = f_0(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{m} w_j f_j(\boldsymbol{x})$

$w_j \geq 0$ を $\varphi_j \in \Sigma_{2r}$ で置き換え

一般化 Lagrange 関数 : $L(\boldsymbol{x}, \varphi) = f_0(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(\boldsymbol{x}) f_j(\boldsymbol{x})$

POP	$\Rightarrow$	一般化 Lagrange 双対 (緩和)
$\Downarrow$ LMI 妥当不等式の追加	双対	$\Downarrow$
PSDP の “無限列”		$\Downarrow$ SOS 緩和の “無限列”
$\Downarrow$ 線形化	双対	$\Downarrow$
SDP(緩和) の “無限列” [1]	$\Leftrightarrow$	SDP(緩和) の “無限列” [2]

[1] Lasserre, “Global optimization with polynomials and the problems of moments”, *SIAM J. on Optim.* (2001).

[2] Parrilo, “Semidefinite programming relaxations for semialgebraic problems”, *Math. Prog.* (2003).

+ 多項式の疎性の活用 $\Longrightarrow$ 大規模問題への適用

目標＝“凸性を持たない問題の大域的最適化”

大規模な問題を解くための疎なデータの有効活用
— 数値実験を通して

内容

1. 多項式最適化問題 (POP)
2. 非負多項式と SOS (Sums of Squares of Polynomials).
3. 制約条件の付かない多項式最適化問題 (POP) に対する SOS 緩和
4. 不等式条件付き多項式最適化問題 (POP) に対する SOS 緩和
5. 数値計算結果
6. 終わりに

数値計算結果

ソフトウェア

- SparsePOP (Waki-Kim-Kojima-Muramatsu, 2005)
  — MATLAB program for constructing sparse and dense
  SDP relaxation problems.
- SFSDP (Kim-Kojima-Waki, 2008)
  — MATLAB program to solve sensor network localization problems.
- SeDuMi to solve SDPs.

ハードウェア

- 2.4GHz Xeon cpu with 6.0GB memory.
- 2 x 1.83 Dual-Core Intel Xeon with 2GB memory

alkyl.gms : globallib からのベンチマーク問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & -6.3x_5x_8 + 5.04x_2 + 0.35x_3 + x_4 + 3.36x_6 \\
\text{sub.to} & -0.820x_2 + x_5 - 0.820x_6 = 0, \\
& 0.98x_4 - x_7(0.01x_5x_{10} + x_4) = 0, \\
& -x_2x_9 + 10x_3 + x_6 = 0, \\
& x_5x_{12} - x_2(1.12 + 0.132x_9 - 0.0067x_9^2) = 0, \\
& x_8x_{13} - 0.01x_9(1.098 - 0.038x_9) - 0.325x_7 = 0.574, \\
& x_{10}x_{14} + 22.2x_{11} = 35.82, \\
& x_1x_{11} - 3x_8 = -1.33,\ \text{lbd}_i \leq x_i \leq \text{ubd}_i\ (i = 1, 2, \ldots, 14).
\end{array}
$$

Sparse			Dense (Lasserre)		
ϵ_{obj}	ϵ_{feas}	cpu	ϵ_{obj}	ϵ_{feas}	cpu
5.6e-10	2.0e-08	23.0	out of	memory	

$$
\epsilon_{\text{obj}} = \frac{|\,\text{最小値の下界} - \text{近似最小解}\,|}{\max\{1, |\,\text{最小値の下界}\,|\}}.
$$

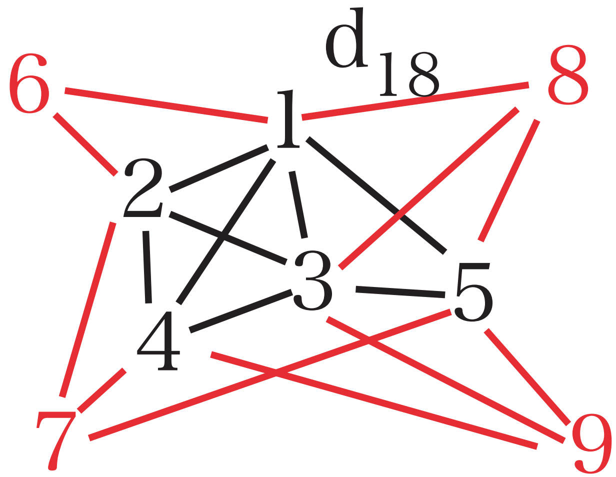
ϵ_{feas} = 等式制約の誤差, cpu : 計算時間（秒）

Sensor network localization problem: Let $s = 2$ or 3.

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{x}^p \in \mathbb{R}^s & : & \text{unknown location of sensors } (p = 1, 2, \ldots, m), \\ \boldsymbol{x}^r = \boldsymbol{a}^r \in \mathbb{R}^s & : & \text{known location of anchors } (r = m+1, \ldots, n), \\ d_{pq} & = & \|\boldsymbol{x}^p - \boldsymbol{x}^q\| + \epsilon_{pq} \text{ — given for } (p, q) \in \mathcal{N}, \\ \mathcal{N} & = & \{(p, q) : \|\boldsymbol{x}^p - \boldsymbol{x}^q\| \leq \rho = \text{a given radio range}\} \end{array}$$

Here ϵ_{pq} denotes a noise.

$m = 5,\ n = 9$.
$1, \ldots, 5$: sensors
$6, 7, 8, 9$: anchors



Anchors' positions are fixed.
A distance is given for $\forall$ edge.
Compute locations of sensors.

$\Rightarrow$ Some nonconvex QOPs

- SDP relaxation +? — FSDP by Biswas-Ye '06, ESDP by Wang et al '07, ... for $s = 2$.
- SOCP relaxation — Tseng '07 for $s = 2$.
- ...

Numerical results on 3 methods applied to a sensor network localization problem with

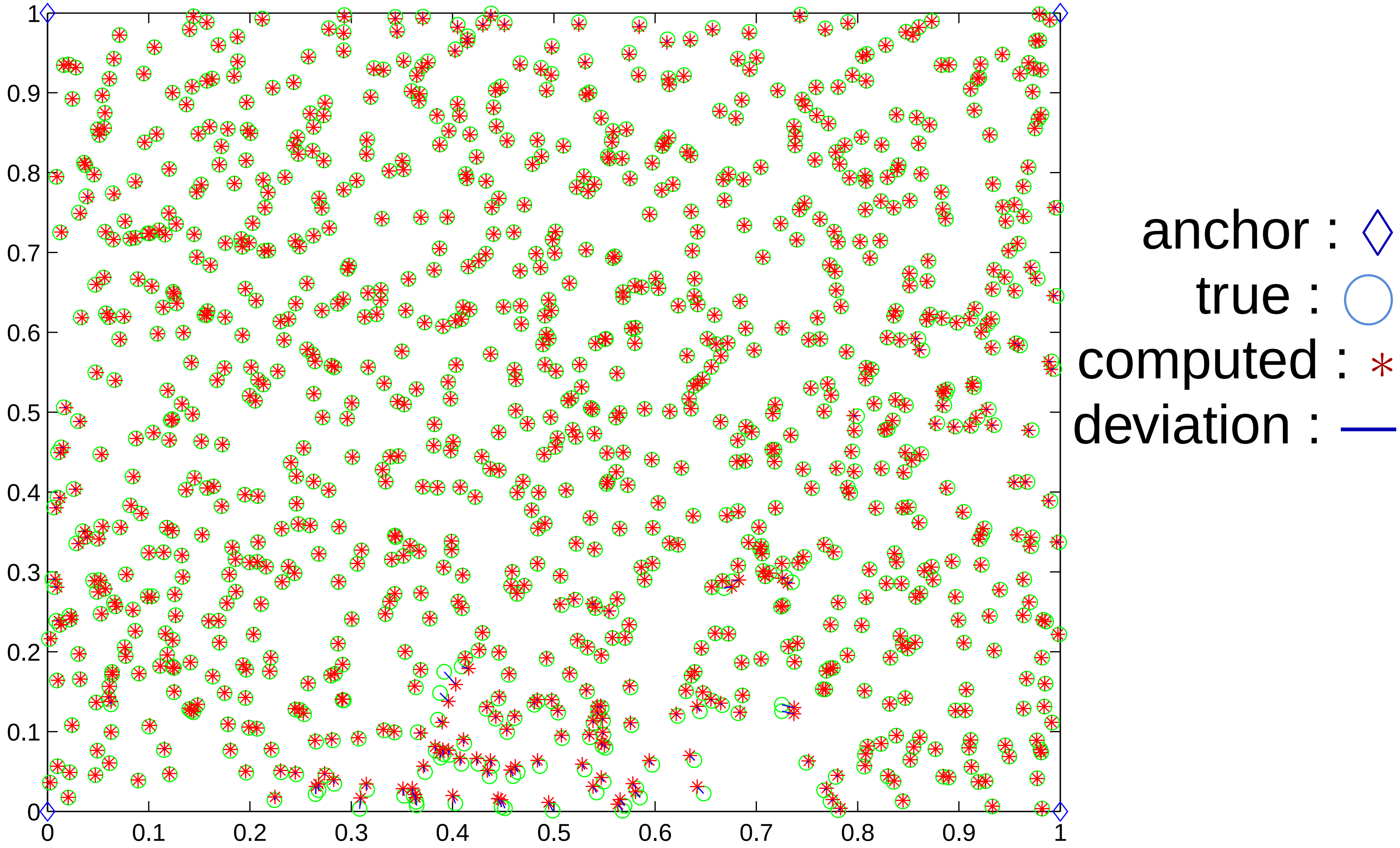
$m =$ the number of sensors dist. randomly in $[0, 1]^2$,
4 anchors located at the corner of $[0, 1]^2$,
$\rho =$ radio distance $= 0.1,$ no noise.

FSDP
SFSDP = FSDP + Exploiting sparsity, as strong as FSDP
ESDP — a further relaxation of FSDP, weaker than FSDP

	SeDuMi cpu time in second		
m	FSDP	SFSDP	ESDP
500	389.1	35.0	62.5
1000	3345.2	60.4	200.3
2000		111.1	1403.9
4000		182.1	11559.8

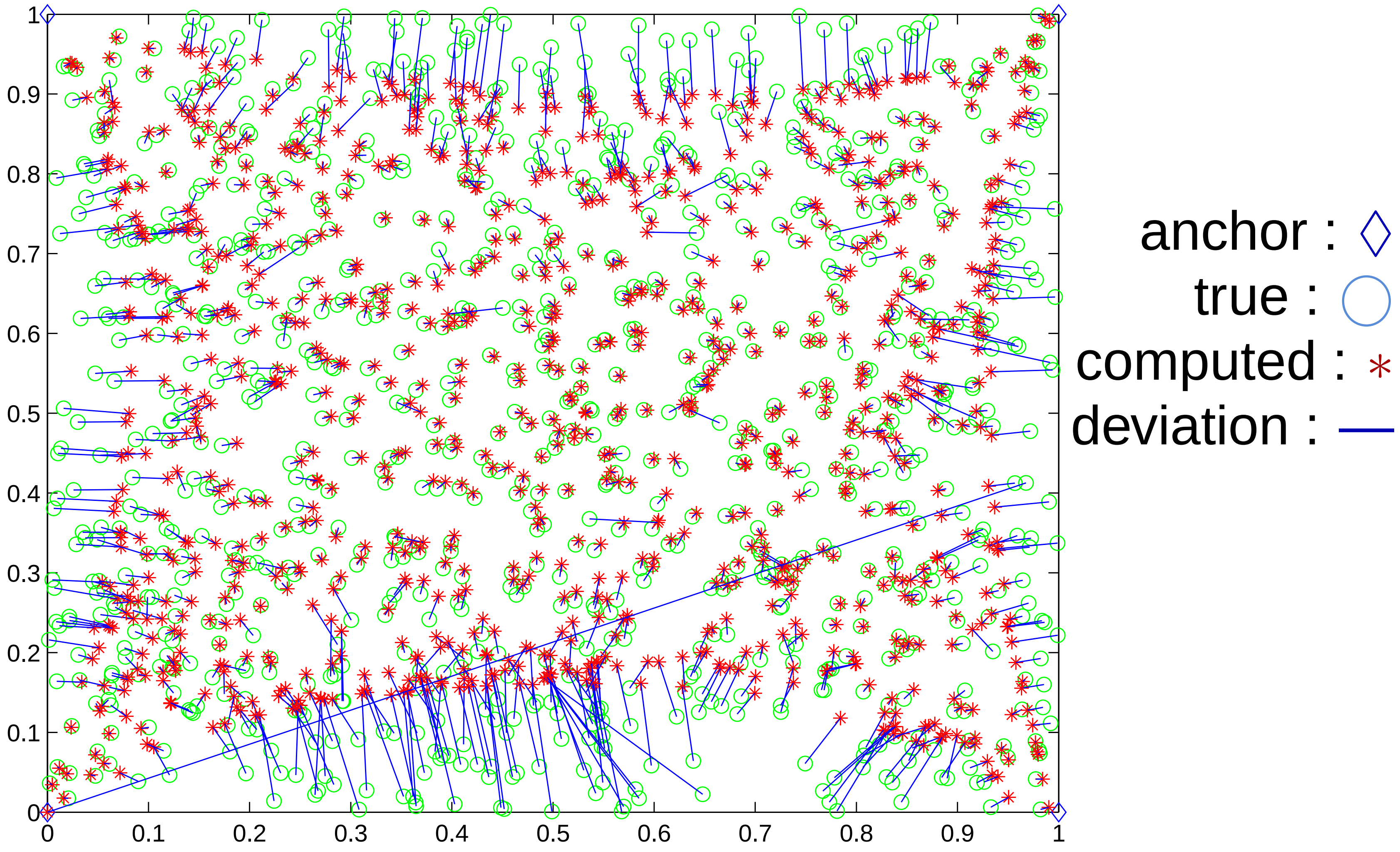
m = 1000 sensors, no noise

SFSDP = FSDP + Exploiting sparsity



m = 1000 sensors, no noise

ESDP

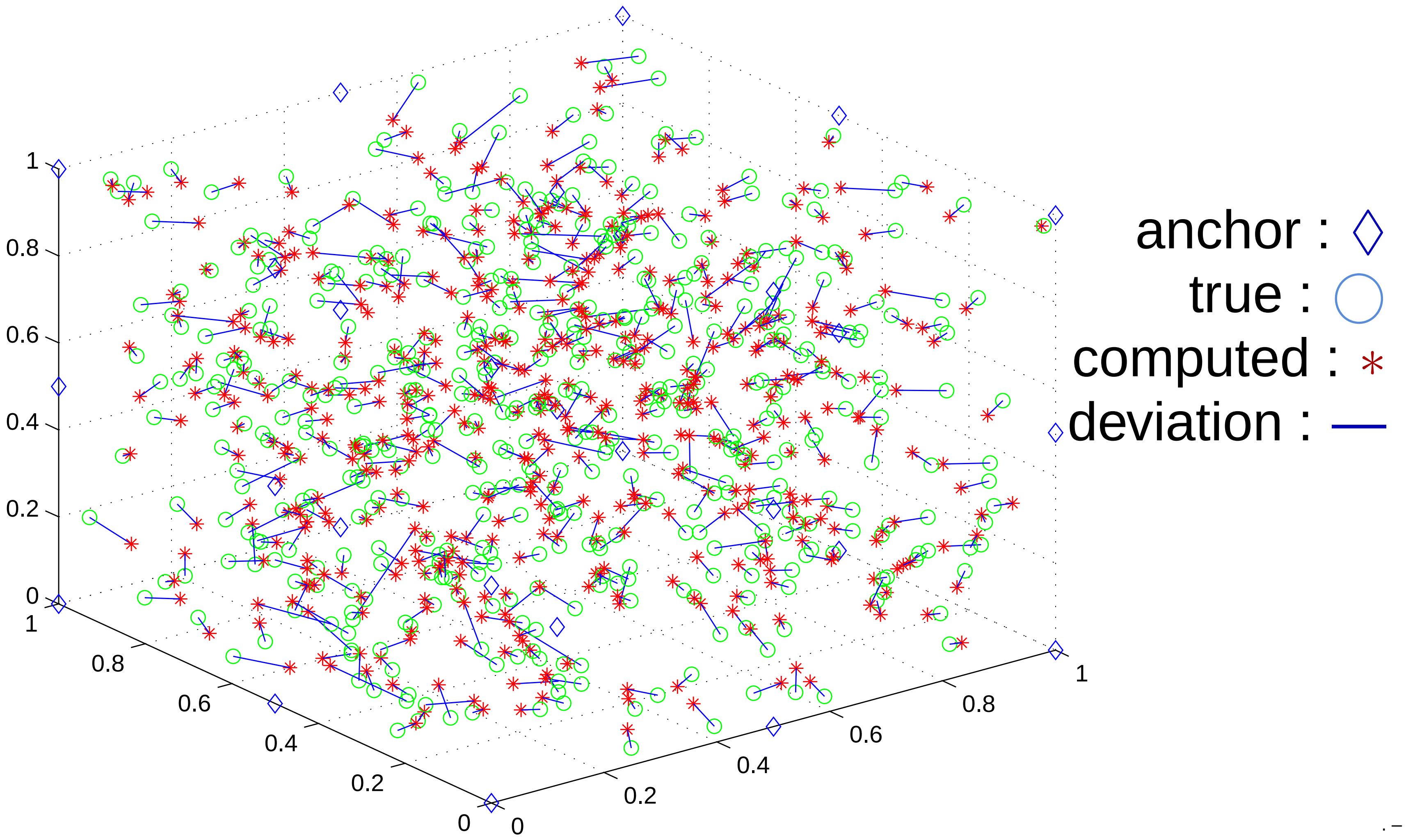


3 dim, 500 sensors, radio range = 0.3, noise $\leftarrow$ N(0,0.1);

(estimated dist.)$\hat{d}_{pq} = (1 + \epsilon_{pq})d_{pq}$(true unknown dist.),

$\epsilon_{pq} \leftarrow N(0, 0.1)$

SFSDP = FSDP + Exploiting sparsity

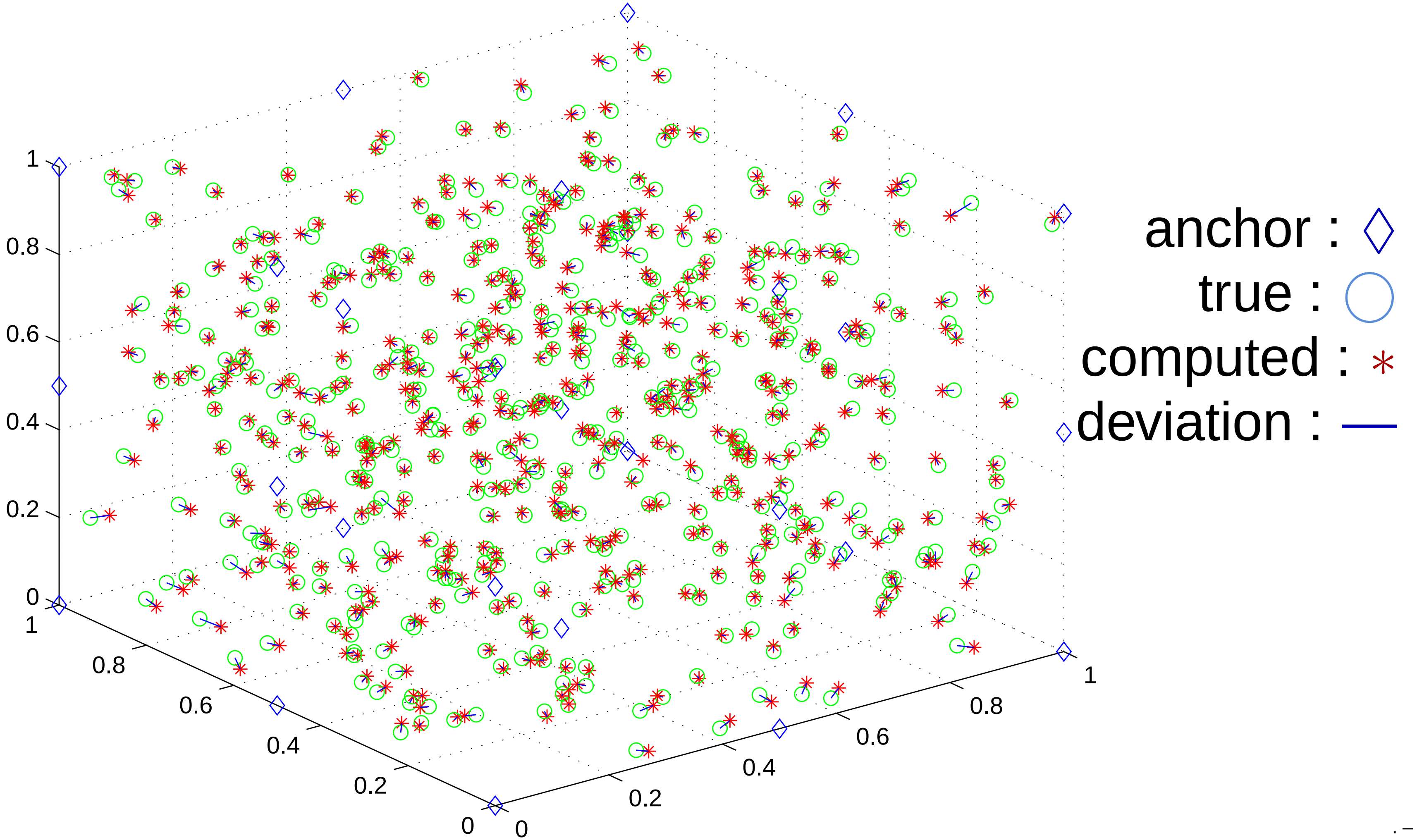


3 dim, 500 sensors, radio range = 0.3, noise $\leftarrow$ N(0,0.1);

(estimated dist.)$\hat{d}_{pq} = (1 + \epsilon_{pq}) d_{pq}$(true unknown dist.),

$\epsilon_{pq} \leftarrow N(0, 0.1)$

SFSDP = FSDP + Exploiting sparsity + Gradient method



目標＝“凸性を持たない問題の大域的最適化”

大規模な問題を解くための疎なデータの有効活用
— 数値実験を通して

内容

1. 多項式最適化問題 (POP)
2. 非負多項式と SOS (Sums of Squares of Polynomials).
3. 制約条件の付かない多項式最適化問題 (POP) に対する SOS 緩和
4. 不等式条件付き多項式最適化問題 (POP) に対する SOS 緩和
5. 数値計算結果
6. 終わりに

- Lasserre's の (dense) SDP 緩和
— 理論的な収束. しかし，問題の規模の増加に伴って計算時間が指数的に増大
- Sparse SDP relaxation
= Lasserre's の (dense) SDP 緩和 + 多項式の疎性の活用
— 理論的な収束，かつ，計算時間を縮小 $\Rightarrow$ 大規模問題への適用.
- 今後の課題
    - 多項式の疎性のさらなる活用
    - 大規模 SDP の高速な解法
    - POP から生じる SDP 問題の数値的な不安定性の解消
    - 規模の大きな多項式 SDP への適用