

Lagrange 緩和と SDP 緩和

東京工業大学 情報理工学研究科
数理・計算科学専攻

小島政和

2003年6月

目標= “凸性を 持た ない 問題の 大域 的最適化”

内容

1. 最適化問題と 緩 和
2. Lagrange 緩 和
3. Lagrange 双対問題
4. 非凸2 次最適化問題の SDP[★] 緩 和
5. 非凸2 次最適化問題の Lagrange 緩 和 = SDP 緩 和
6. 多項式計画問題の Lagrange 緩 和 $\implies$ SDP 緩 和
7. ま と め

★ : Semidefinite Program, 半正定値計画問題

1. 最適化問題と緩和 — 1

最適化問題

$\mathcal{P}_0$ 目的: $f_0(x) \rightarrow$ 最小化; 条件: $x \in S_0$. ただし, $f_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $S_0 \subset \mathbb{R}^n$.

一般の非線形, 組合せ最適化問題の大域的最適解を正確に求めるのは難しい

不等式・等式最適化問題

目的: $f_0(x) \rightarrow$ 最小化;

条件: $f_i(x) \leq 0$ ($i = 1, 2, \dots, \ell$), $f_j(x) = 0$ ($j = \ell + 1, \dots, m$).

● 関数 f_i の性質, 条件

”連続”, ”なめらか (微分可能)”

”非凸”, ”凸”

”線形”, ”2 次”, ”多変数多項式”

1. 最適化問題と緩和 — 2

最適化問題

$\mathcal{P}_0$ 目的: $f_0(x) \rightarrow$ 最小化; 条件: $x \in S_0$. ただし, $f_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $S_0 \subset \mathbb{R}^n$.

一般の非線形, 組合せ最適化問題の大域的最適解を正確に求めるのは難しい

例1 (2次最適化問題)

目的: $x_2^2 \rightarrow$ 最小化; 条件: $x_1^2 + x_2^2 \leq 4$, $-x_1^2/8 + 1 \leq x_2$.

0-1変数; $x_j = 0$ or $1 \Leftrightarrow x_j(x_j - 1) = 0$ (2次等式)

例2 (多項式最適化問題)

目的: $-x_1^3 + 2x_1x_2^2 \rightarrow$ 最小化; 条件: $x_1^4 + x_2^4 \leq 1$, $x_1 \geq 0$, $x_1^2 + x_2^2 \geq 0.5$.

● 2次関数の記述能力 $\leq$ 多変数多項式の記述能力

● 多変数多項式 + 凸関数 ($-\log(x)$, e^x 等) で記述される最適化問題が大域的最適化のフレームワークとしてよい?

1. 最適化問題と緩和 — 3

最適化問題

$\mathcal{P}_0$ 目的: $f_0(x) \rightarrow$ 最小化; 条件: $x \in S_0$. ただし, $f_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $S_0 \subset \mathbb{R}^n$.

— 一般の非線形, 組合せ最適化問題の大域的最適解を正確に求めるのは難しい



近似解法:

- (i) より小さい目的関数値 $f(x)$ を達成する許容解 $x \in S_0$ を生成する仕組み
- (ii) 未知の最小値を見積もる仕組み

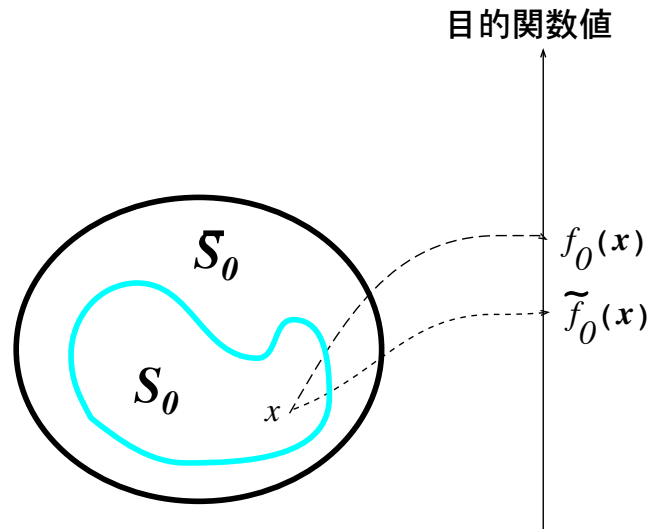
が必要



緩和問題

最適化問題: $\mathcal{P}_0$ 目的: $f_0(x) \rightarrow$ 最小化; 条件: $x \in S_0$

緩和問題: $\tilde{\mathcal{P}}_0$ 目的: $\tilde{f}_0(x) \rightarrow$ 最小化; 条件: $x \in \tilde{S}_0$
ただし, $S_0 \subseteq \tilde{S}_0$, かつ $\tilde{f}_0(x) \leq f_0(x) \ (\forall x \in S_0)$



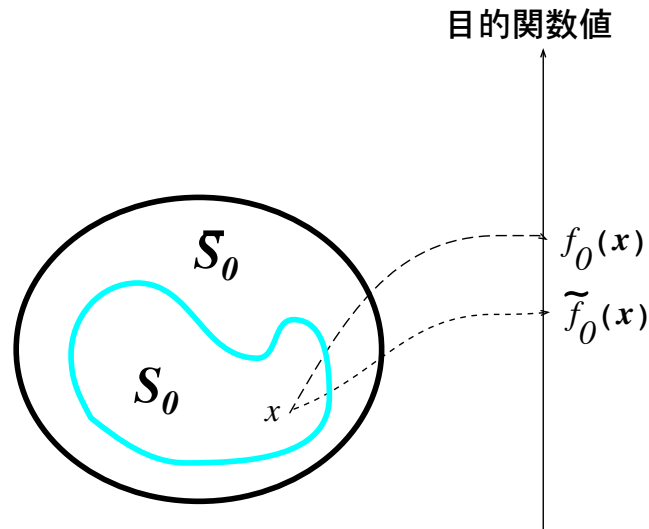
最小値の見積もり:

$$f^* \equiv \mathcal{P} \text{ の 最小値 (未知)} \geq \tilde{f}^* \equiv \tilde{\mathcal{P}}_0 \text{ の 最小値}$$

すでに計算した近似最小値 $f(\hat{x})$ と $\tilde{f}^*$ との差 $f(\hat{x}) - \tilde{f}^*$ が十分に小さければ, 近似最小解 $\hat{x}$ を安心して使える

最適化問題: $\mathcal{P}_0$ 目的: $f_0(x) \rightarrow$ 最小化; 条件: $x \in S_0$

緩和問題: $\tilde{\mathcal{P}}_0$ 目的: $\tilde{f}_0(x) \rightarrow$ 最小化; 条件: $x \in \tilde{S}_0$
ただし, $S_0 \subseteq \tilde{S}_0$, か $\tilde{f}_0(x) \leq f_0(x)$ ($\forall x \in S_0$)



緩和問題が満たすべき条件

- $S_0 \subseteq \tilde{S}_0$
- $\tilde{f}_0(x) \leq f_0(x)$ ($\forall x \in S_0$).
- $y \notin S_0$ に 対して は , $\tilde{f}_0(y)$ と $f_0(y)$ の 大小関係は 問わ ない !

緩和の例

例1 (2次最適化問題)

目的: $x_2^2 \rightarrow$ 最小化; 条件: $x_1^2 + x_2^2 \leq 4$, $-x_1^2/8 + 1 \leq x_2$.

↓ 緩和

目的: $x_2^2 \rightarrow$ 最小化; 条件: $x_2^2 \leq 4$.

例2 (多項式最適化問題)

目的: $-x_1^3 + 2x_1x_2^2 \rightarrow$ 最小化; 条件: $x_1^4 + x_2^4 \leq 1$, $x_1 \geq 0$, $x_1^2 + x_2^2 \geq 0.5$

↓ 緩和

目的: $-x_1 \rightarrow$ 最小化; 条件: $x_1 \leq 1$, $x_1 \geq 0$.

システムティックに緩和問題を作るには?

- Lagrange 緩和 — 一般の等式不等式条件付き最適化問題に適用可能. ただし, 緩和問題が解けるためには条件が必要
- SDP 緩和 — 多項式最適化問題に適用可能.

2. Lagrange 緩和 — 1

等式条件付き 最適化問題

目的: $f_0(x) \rightarrow$ 最小化; 条件: $x \in S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : f_j(x) = 0 (j = 1, \dots, m)\}$

Lagrange 関数

$$L(x, w) = f_0(x) + w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) + \cdots + w_m f_m(x).$$

ただし, $w = (w_1, w_2, \dots, w_m) \in \mathbb{R}^m$.

Lagrange 関数の性質: $\forall w \in \mathbb{R}^m$ に 対して ,

$$x \in S_0 \Rightarrow f_j(x) = 0 \ (j = 1, 2, \dots, m) \Rightarrow$$

$$L(x, w) = f_0(x) + w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) + \cdots + w_m f_m(x) = f_0(x)$$

Lagrange 緩和問題: $\forall w \in \mathbb{R}^m$ を 固定して ,

目的: $L(x, w) \rightarrow$ 最小化; 条件: $x \in \mathbb{R}^n$

緩和の条件: $S_0 \subset \mathbb{R}^n$, $L(w, x) \leq f_0(x)$ if $x \in S_0$.

したがって, $L^*(w) \equiv \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, w) \leq \min_{x \in S_0} f_0(x) \ (\forall w \in \mathbb{R}_+^m)$

2. Lagrange 緩和 — 2

不等式条件付き 最適化問題

目的: $f_0(x) \rightarrow$ 最小化; 条件: $x \in S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : f_j(x) \leq 0 (j = 1, \dots, m)\}$

Lagrange 関数

$$L(x, w) = f_0(x) + w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) + \cdots + w_m f_m(x).$$

ただし, $w \in \mathbb{R}_+^m \equiv \{w = (w_1, w_2, \dots, w_m) \in \mathbb{R}^m : w_j \geq 0\}$.

Lagrange 関数の性質: $\forall w \in \mathbb{R}_+^m$ に 対して ,

$$x \in S_0 \Rightarrow f_j(x) \leq 0 \ (j = 1, 2, \dots, m) \Rightarrow$$

$$L(x, w) = f_0(x) + w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) + \cdots + w_m f_m(x) \leq f_0(x)$$

Lagrange 緩和問題: $\forall w \in \mathbb{R}_+^m$ を 固定して ,

目的: $L(x, w) \rightarrow$ 最小化; 条件: $x \in \mathbb{R}^n$

緩和の条件: $S_0 \subset \mathbb{R}^n$, $L(w, x) \leq f_0(x)$ if $x \in S_0$.

したがって, $L^*(w) \equiv \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, w) \leq \min_{x \in S_0} f_0(x) \ (\forall w \in \mathbb{R}_+^m)$

2. Lagrange 緩和 — 3

不等式条件付き 最適化問題

目的: $f_0(x) \rightarrow$ 最小化; 条件: $x \in S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : f_j(x) \leq 0 (j = 1, \dots, m)\}$

Lagrange 関数

$$L(x, w) = f_0(x) + w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) + \cdots + w_m f_m(x).$$

ただし, $w \in \mathbb{R}_+^m \equiv \{w = (w_1, w_2, \dots, w_m) \in \mathbb{R}^m : w_j \geq 0\}$.

例 1 目的: $x_2^2 \rightarrow$ 最小化; 条件: $x_1^2 + x_2^2 - 4 \leq 0, -x_1^2/8 - x_2 + 1 \leq 0$

$$\begin{aligned} L(x, w) &\equiv x_2^2 + w_1(x_1^2 + x_2^2 - 4) + w_2(-x_1^2/8 - x_2 + 1) \\ &= (w_1 - w_2/8)x_1^2 - w_2x_2 + (1 + w_1)x_2^2 - 4w_1 + w_2. \end{aligned}$$

ただし, $w_1 \geq 0, w_2 \geq 0$.

Lagrange 緩和問題: $w_1 = 1, w_2 = 8$ に固定すると,

目的: $L(x, w) = -8x_2 + 2x_2^2 + 8 \rightarrow$ 最小化; 条件: $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

2. Lagrange 緩和 — 4

不等式条件付き 最適化問題

目的: $f_0(x) \rightarrow$ 最小化; 条件: $x \in S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : f_j(x) \leq 0 (j = 1, \dots, m)\}$

Lagrange 関数

$$L(x, w) = f_0(x) + w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) + \cdots + w_m f_m(x).$$

ただし, $w \in \mathbb{R}_+^m \equiv \{w = (w_1, w_2, \dots, w_m) \in \mathbb{R}^m : w_j \geq 0\}$.

例2 (多項式最適化問題)

目的: $-x_1^3 + 2x_1x_2^2 \rightarrow$ 最小化;

条件: $x_1^4 + x_2^4 - 1 \leq 0, -x_1 \leq 0, -x_1^2 - x_2^2 - 0.5 \leq 0$.

$$\begin{aligned} L(x, w) &\equiv -x_1^3 + 2x_1x_2^2 + w_1(x_1^4 + x_2^4 - 1) \\ &\quad + w_2(-x_1) + w_3(-x_1^2 - x_2^2 - 0.5) \\ &= w_1x_1^4 + w_1x_2^4 - x_1^3 + 2x_1x_2^2 \\ &\quad - w_3x_1^2 - w_3x_2^2 - w_2x_1 - w_1 - 0.5w_3. \end{aligned}$$

ただし, $w_1 \geq 0, w_2 \geq 0$.

● Lagrange 緩和は出来るが, その最小化は依然として難しい? $\Rightarrow$ SOS, SDP 緩和

3. Lagrange 双対問題 — 1

不等式条件付き 最適化問題

目的: $f_0(x) \rightarrow$ 最小化; 条件: $x \in S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : f_j(x) \leq 0 (j = 1, \dots, m)\}$

Lagrange 関数

$$L(x, w) = f_0(x) + w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) + \cdots + w_m f_m(x).$$

ただし, $w \in \mathbb{R}_+^m \equiv \{w = (w_1, w_2, \dots, w_m) \in \mathbb{R}^m : w_j \geq 0\}$.

Lagrange 緩和問題: $\forall w \in \mathbb{R}_+^m$ を固定して,

目的: $L(x, w) \rightarrow$ 最小化; 条件: $x \in \mathbb{R}^n$

$$L^*(w) \equiv \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, w) \leq \min_{x \in S_0} f_0(x) \quad (\forall w \in \mathbb{R}_+^m)$$

Lagrange 双対問題 (最良の Lagrange 緩和問題)

目的: $L^*(w) \rightarrow$ 最大化; 条件: $w \in \mathbb{R}_+^m$

3. Lagrange 双対問題 — 2

例1 目的: $x_2^2 \rightarrow$ 最小化; 条件: $x_1^2 + x_2^2 - 4 \leq 0$, $-x_1^2/8 - x_2 + 1 \leq 0$

$$\begin{aligned} L(x, w) &\equiv x_2^2 + w_1(x_1^2 + x_2^2 - 4) + w_2(-x_1^2/8 - x_2 + 1) \\ &= (w_1 - w_2/8)x_1^2 - w_2x_2 + (1 + w_1)x_2^2 - 4w_1 + w_2. \end{aligned}$$

ただし, $w_1 \geq 0, w_2 \geq 0$.

Lagrange 双対問題

$$\max_{(w_1, w_2) \geq 0} \min_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} (w_1 - w_2/8)x_1^2 - w_2x_2 + (1 + w_1)x_2^2 - 4w_1 + w_2.$$

例2 (多項式最適化問題)

目的: $-x_1^3 + 2x_1x_2^2 \rightarrow$ 最小化;

条件: $x_1^4 + x_2^4 - 1 \leq 0$, $-x_1 \leq 0$, $-x_1^2 - x_2^2 - 0.5 \leq 0$.

$$\begin{aligned} L(x, w) &= w_1x_1^4 + w_2x_2^4 - x_1^3 + 2x_1x_2^2 \\ &\quad - w_3x_1^2 - w_3x_2^2 - w_2x_1 - w_1 - 0.5w_3. \end{aligned}$$

ただし, $w_1 \geq 0, w_2 \geq 0$.

Lagrange 双対問題: $\max_{(w_1, w_2) \geq 0} \min_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} L(x, w).$

4. 非凸2 次最適化問題の SDP 緩和 — 1

QOP(2 次最適化問題) 目的: $f_0(x) \equiv x^T Q_0 x + q_0^T x \rightarrow \text{最小化}$
条件: $f_i(x) \equiv x^T Q_i x + q_i^T x + \pi_i \leq 0 \ (i = 1, \dots, m)$

ただし, $x \in \mathbb{R}^n$: 変数,

$Q_i : n \times n$ 対称行列, $q_i \in \mathbb{R}^n$, $\pi_i \in \mathbb{R}$: 定数

記法: $n \times n$ 対称行列 Q, X に対して, $Q \bullet X = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n Q_{jk} X_{jk}$

この記法を使うと

$$x^T Q x = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n Q_{jk} x_j x_k = Q \bullet x x^T.$$

ここで, $x x^T$ は $n \times n$ 対称行列;

$$x x^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} (x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 x_1 & x_1 x_2 & \cdots & x_1 x_n \\ x_2 x_1 & x_2 x_2 & \cdots & x_2 x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n x_1 & x_n x_2 & \cdots & x_n x_n \end{pmatrix}.$$

4. 非凸2 次最適化問題の SDP 緩和 — 2

QOP(2 次最適化問題) 目的: $f_0(x) \equiv x^T Q_0 x + q_0^T x \rightarrow \text{最小化}$
 条件: $f_i(x) \equiv x^T Q_i x + q_i^T x + \pi_i \leq 0 \ (i = 1, \dots, m)$

$\Updownarrow$ 等価

目的: $Q_0 \bullet xx^T + q_0^T x \rightarrow \text{最小化}$
 条件: $Q_i \bullet xx^T + q_i^T x + \pi_i \leq 0 \ (i = 1, \dots, m)$

$\Updownarrow$ 等価

目的: $Q_0 \bullet X + q_0^T x \rightarrow \text{最小化}$
 条件: $Q_i \bullet X + q_i^T x + \pi_i \leq 0 \ (i = 1, \dots, m), \ X - xx^T = O$

$\Downarrow$ SDP 緩和

目的: $Q_0 \bullet X + q_0^T x \rightarrow \text{最小化}$
 条件: $Q_i \bullet X + q_i^T x + \pi_i \leq 0 \ (i = 1, \dots, m), \ X - xx^T \succeq O$

ただし, $A \succeq O \Leftrightarrow$ 対称行列 A が半正定値, A の固有値がすべて非負, または,
 $u^T A u \geq 0$ for $\forall u \in \mathbb{R}^n$.

4. 非凸2 次最適化問題の SDP 緩和 — 3

QOP(2 次最適化問題) 目的: $f_0(x) \equiv x^T Q_0 x + q_0^T x \rightarrow \text{最小化}$
 条件: $f_i(x) \equiv x^T Q_i x + q_i^T x + \pi_i \leq 0 \ (i = 1, \dots, m)$

↓ SDP 緩和

目的: $Q_0 \bullet X + q_0^T x \rightarrow \text{最小化}$
 条件: $Q_i \bullet X + q_i^T x + \pi_i \leq 0 \ (i = 1, \dots, m), \ X - xx^T \succeq O$

⇕ 等価 $X - xx^T \succeq O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x^T \\ x & X \end{pmatrix} \succeq O$

SDP 目的: $Q_0 \bullet X + q_0^T x \rightarrow \text{最小化}$

条件: $Q_i \bullet X + q_i^T x + \pi_i \leq 0 \ (i = 1, \dots, m), \ \begin{pmatrix} 1 & x^T \\ x & X \end{pmatrix} \succeq O$

- SDP は LP (Linear Program) の 対称行列 $\wedge$ の 空間 の 拡張
- LP に対する 内点法が SDP に 拡張されており, かなり 大きな問題 (n, m が 数千程度) まで, 効率よく 解ける. ただし, n は 変数行列 X の サイズ.

5. 非凸2 次最適化問題の Lagrange 緩和 = SDP 緩和 — 1

準備 — 1

$\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

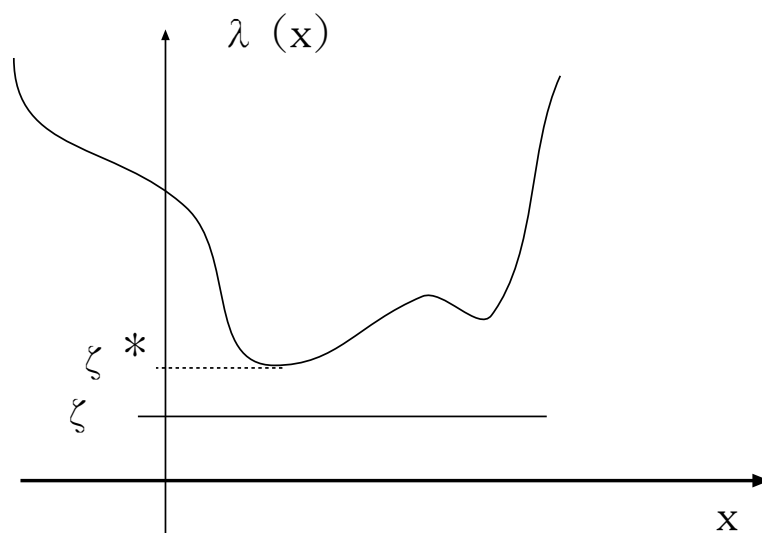
$$\zeta^* = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \lambda(x)$$



半無限計画 (無限個の不等式制約条件付の最適化問題)

目的: $\zeta \rightarrow$ 最大化; 条件 $\lambda(x) - \zeta \geq 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}^n$)

変数は ζ のみ. $x \in \mathbb{R}^n$ は条件 $\lambda(x) - \zeta \geq 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}^n$) 記述用パラメータ.



5. 非凸2 次最適化問題の Lagrange 緩和 = SDP 緩和 — 2

準備 — 2

線形・2 次関数の非負条件

$$\lambda(x) \equiv x^T Q x + q^T x + \gamma \geq 0 \text{ for } \forall x \in \mathbb{R}^n$$



$$\lambda(x) \equiv x^T Q x + q^T x + \gamma = (1, x^T) V \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \text{ for } \exists V \succeq O \text{ and } \forall x \in \mathbb{R}^n$$

5. 非凸2 次最適化問題の Lagrange 緩和 = SDP 緩和 — 3

準備 — 3

例: 線形・2 次関数 $\lambda(x) = d + bx_1 + cx_2 + x_1^2 + ax_1x_2 + 2x_2^2$ が条件 $\lambda(x) \geq 0$ for $\forall x \in \mathbb{R}^2$ を満たすような a, b, c, d の特徴付け

$$\begin{aligned} d + bx_1 + cx_2 + x_1^2 + ax_1x_2 + 2x_2^2 &= (1, x_1, x_2)V \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= V_{00} + 2V_{01}x_1 + 2V_{02}x_2 + V_{11}x_1^2 + 2V_{12}x_1x_2 + V_{22}x_2^2 \\ \text{for } \exists V &= \begin{pmatrix} V_{00} & V_{01} & V_{02} \\ V_{01} & V_{11} & V_{12} \\ V_{02} & V_{12} & V_{22} \end{pmatrix} \succeq O \end{aligned}$$

$\Updownarrow$ 両辺の定数 $x_1, x_2, x_1x_2, x_1^2, x_2^2$ の係数は一致.

$$d = V_{00}, \quad b = 2V_{01}, \quad c = 2V_{02}, \quad 1 = V_{11}, \quad a = 2V_{12}, \quad 2 = 2V_{22}, \quad V \succeq O$$

(Linear Matrix Inequality)

QOP(2 次最適化問題) 目的: $f_0(x) \equiv x^T Q_0 x + q_0^T x \rightarrow$ 最小化
 条件: $f_i(x) \equiv x^T Q_i x + q_i^T x + \pi_i \leq 0 \ (i = 1, \dots, m)$

Lagrange 緩和問題: $\forall w \in \mathbb{R}_+^m$ を固定して,

目的: $L(x, w) \equiv f_0(x) + \sum_{i=1}^m w_i f_i(x) \rightarrow$ 最小化; 条件: $x \in \mathbb{R}^n$

$\Updownarrow$ 等価

目的: $\zeta \rightarrow$ 最大化; 条件: $f_0(x) + \sum_{i=1}^m w_i f_i(x) - \zeta \geq 0 \ (\forall x \in \mathbb{R}^n)$

$\Updownarrow$ 等価

目的: $\zeta \rightarrow$ 最大化; 条件: $f_0(x) + \sum_{i=1}^m w_i f_i(x) - \zeta = (1, x^T) V \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$ for $\exists V \succeq O$.

$\Updownarrow$ 両辺の $x_1, x_2, \dots, x_n$ の係数の比較

目的: $\zeta \rightarrow$ 最大化;
 条件: パラメータ $w \in \mathbb{R}_+^m$ と変数 V に関する線形等式, $V \succeq O$

QOP(2 次最適化問題) 目的: $f_0(x) \equiv x^T Q_0 x + q_0^T x \rightarrow \text{最小化}$
 条件: $f_i(x) \equiv x^T Q_i x + q_i^T x + \pi_i \leq 0 \ (i = 1, \dots, m)$

パラメータ $w \in \mathbb{R}_+^m$ を固定した Lagrange 緩和問題

$\Updownarrow$ 等価

目的: $\zeta \rightarrow \text{最大化};$
 条件: パラメータ $w \in \mathbb{R}_+^m$ と変数 V に関する線形等式, $V \succeq O$

$w \in \mathbb{R}_+^n$ に関する最大化 $\Downarrow$ 最良の Lagrange 緩和

SDP 目的: $\zeta \rightarrow \text{最大化};$
 条件: 変数 $w \in \mathbb{R}_+^m$ と V に関する線形等式, $V \succeq O$

QOP の SDP 緩和

$\Updownarrow$ 双対

目的: $Q_0 \bullet X + q_0^T x \rightarrow \text{最小化}$
 条件: $Q_i \bullet X + q_i^T x + \pi_i \leq 0 \ (i = 1, \dots, m), \begin{pmatrix} 1 & x^T \\ x & X \end{pmatrix} \succeq O$

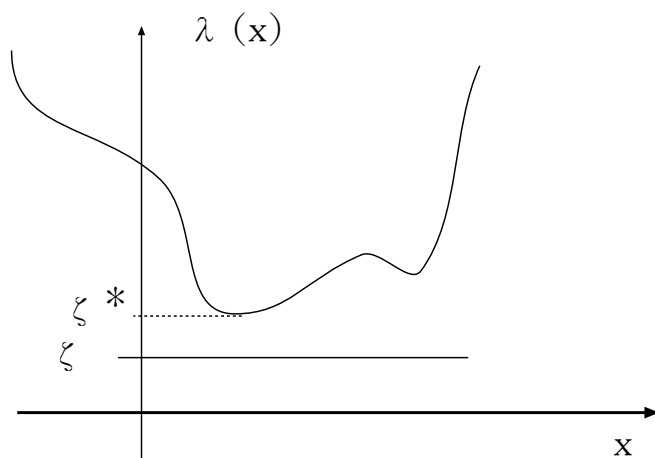
6. POP(多項式計画問題)の Lagrange 緩和 $\implies$ SDP 緩和 — 1, 準備

$\lambda(x)$: 次数 r の n 変数多項式 $\rightarrow$ 最小化

$\Updownarrow$

目的: $\zeta \rightarrow$ 最大化; 条件: $\lambda(x) - \zeta \geq 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}^n$)

変数は ζ のみ. $x \in \mathbb{R}^n$ は条件 $\lambda(x) - \zeta \geq 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}^n$) の記述用パラメータ.



非負条件の SOS (Sum of Squares of Polynomials) による置き換え.

$$\Downarrow \quad \text{SOS} = \left\{ \sum_{j=1}^k g_j(x)^2 : g_j(x) \text{ は 多項式, } \forall k \right\}$$

目的: $\zeta \rightarrow$ 最大化; 条件: $\lambda(x) - \zeta \in \text{SOS}$

6. POP(多項式計画問題)の Lagrange 緩和 $\implies$ SDP 緩和 — 2, 準備

例: $\lambda(x) = -2x_1 + x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2^3 + 4x_1^2x_2^4$

目的: $\zeta \rightarrow$ 最大化; 条件: $\lambda(x) - \zeta \geq 0 \ (\forall x \in \mathbb{R}^2)$

$\Downarrow$

目的: $\zeta \rightarrow$ 最大化

条件: $\lambda(x) - \zeta = \text{Sum of Squares} \left(\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} & V_{14} \\ V_{12} & V_{22} & V_{23} & V_{24} \\ V_{13} & V_{23} & V_{33} & V_{34} \\ V_{14} & V_{24} & V_{34} & V_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_1x_2^2 \end{pmatrix} \right)$

for some $4 \times 4 \ V \succeq O$

$\Updownarrow$ 等式の両辺の $1, x_1, x_2, x_1x_2^2$ の係数が一致

SDP (半正定値計画問題)

目的: $\zeta \rightarrow$ 最大化

条件: $\zeta = V_{11}, -2 = 2V_{12}, 1 = V_{22}, 1 = V_{33}, -4 = 2V_{34},$
 $4 = V_{44}, 0 = 2V_{13} = 2V_{23} = 2V_{14} = 2V_{24}, V \succeq O$

一般には, 等式条件は V の要素に関する線形方程式系になる.

6. POP(多項式計画問題)の Lagrange 緩和 $\implies$ SDP 緩和 — 3

POP 目的: $f_0(x) \rightarrow$ 最小化; 条件: $f_i(x) \leq 0$ ($i = 1, \dots, m$)

ただし, $f_0(x), f_1(x), \dots, f_m(x)$ は 多変数多項式

例2 (多項式最適化問題)

目的: $-x_1^3 + 2x_1x_2^2 \rightarrow$ 最小化;

条件: $x_1^4 + x_2^4 - 1 \leq 0, -x_1 \leq 0, -x_1^2 - x_2^2 + 0.5 \leq 0.$

Lagrange 関数: $L(x, w) = -x_1^3 + 2x_1x_2^2 + w_1(x_1^4 + x_2^4 - 1) + w_2(-x_1) + w_3(-x_1^2 - x_2^2 + 0.5)$
($\forall w \in \mathbb{R}_+^m$).

$\Leftrightarrow$ Lagrange 双対問題 $\zeta, w \in \mathbb{R}^m$ 変数

目的: $\zeta \rightarrow$ 最大化 ; 条件: $L(x, w) - \zeta \geq 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}^n$)

$\Rightarrow$ さらに, 緩和 $\Rightarrow$ SOS (Sum of Squares Optimization Problem)

目的: $\zeta \rightarrow$ 最大化 ; 条件: $L(x, w) - \zeta \in \text{SOS}$ ($\forall x \in \mathbb{R}^n$)

$\Leftrightarrow$ SDP(半正定値計画問題)

6. POP(多項式計画問題)の Lagrange 緩和 $\implies$ SDP 緩和 — 3

POP 目的: $f_0(x) \rightarrow$ 最小化; 条件: $f_i(x) \leq 0$ ($i = 1, \dots, m$)

ただし, $f_0(x), f_1(x), \dots, f_m(x)$ は 多変数多項式

Lagrange 関数: $L(x, w) = f_0(x) + w_1 f_1(x) + \dots + w_m f_m(x)$ ($\forall w \in \mathbb{R}_+^m$).

Lagrange 緩和問題 ($w \in \mathbb{R}_+^m$ を固定して)

目的: $L(x, w) \rightarrow$ 最小化 ; 条件: $x \in \mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow$ Lagrange 双対問題 $\zeta, w \in \mathbb{R}^m$ 変数

目的: $\zeta \rightarrow$ 最大化 ; 条件: $L(x, w) - \zeta \geq 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}^n$)

$\Rightarrow$ さらに, 緩和 $\Rightarrow$ SOS (Sum of Squares Optimization Problem)

目的: $\zeta \rightarrow$ 最大化 ; 条件: $L(x, w) - \zeta \in \text{SOS}$ ($\forall x \in \mathbb{R}^n$)

$\Leftrightarrow$ SDP(半正定値計画問題)

7. まとめ

◇ 以下の 3 つは 密接に 結び つ いて いる .

- (a) Lagrange 緩 和
- (b) SDP(Semidefinite Program, 半正定値計画緩 和)
- (c) Sum of Squares of Polynomials

◇ これら を 適用する 最適化問題の 枠組みは

- (i) 2 次最適化問題
- (ii) 多項式最適化問題
- (iii) (多項式+ 凸関 数) 最適化問題 — “凸な部分を 緩 和する 必要は ない ”

◇ より 大規 模な最適化問題を 解く には ,

- 強力な計算機 環 境, SDP を 含む 凸計画問題を 解く 強力なソフ トウ エア
- 問題の 構造, デ- タの 疎性の 利用

参考文献

- [1] M. Kojima, S. Kim and H. Waki, “A general framework for convex relaxation of polynomial optimization problems over cones”, *J. of OR Society of Japan*, 46 (2003) 125-144.
- [2] J. B. Lasserre, “Global optimization with polynomials and the problems of moments”, *SIAM J. on Optimization*, 11 (2001) 796–817.
- [3] P. A. Parrilo, “Semidefinite programming relaxations for semialgebraic problems”. *Math. Prog.*, 96 (2003) 293–320.
- [4] S. Prajna, A. Papachristodoulou and P. A. Parrilo, “SOSTOOLS: Sum of Squares Optimization Toolbox for MATLAB – User’s Guide”, Control and Dynamical Systems, California Institute of Technology, Pasadena, CA 91125 USA, 2002.
- [5] M. Putinar, “Positive polynomials on compact semi-algebraic sets”, *Indiana University Mathematics Journal*, 42 (1993) 969–984.
- [6] V. Powers and T. Wörmann, “An algorithm for sums of squares of real polynomials”, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 127 (1998) 99-104.
- [7] B. Reznick, “Extremal psd forms with few terms”, *Duke Mathematical Journal*, 45 (1978) 363-374.