

多項式最適化問題と双対性

東京工業大学情報理工学研究科

小島政和

第1回横幹連合コンファレンス

2005年11月25,26日

JA 長野県ビル

目次

1. 多項式最適化問題
2. Lagrange緩和とLagrange双対問題
3. 2乗和多項式と一般化Lagrange双対問題
4. 数値例
5. おわりに

目次

1. 多項式最適化問題
2. Lagrange緩和とLagrange双対問題
3. 2乗和多項式と一般化Lagrange双対問題
4. 数値例
5. おわりに

多項式最適化問題(POP)

$$p^* = \min f_0(x) \text{ s.t. } f_j(x) \geq 0 \ (j = 1, \dots, m)$$

ただし, $f_0, \dots, f_m$ は $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$
を変数とする多変数多項式

多項式最適化問題(POP)

$$p^* = \min f_0(x) \text{ s.t. } f_j(x) \geq 0 \ (j = 1, \dots, m)$$

例: **$n=3, m=2$** .

$$\min f_0(x) = x_1^3 - 2x_1x_2^3 + x_1^2x_2x_3 - 4x_3^2$$

$$\text{sub.to } f_1(x) = -x_1^2 + 5x_2x_3 + 1 \geq 0$$

$$f_2(x) = x_1^2 - 3x_1x_2x_3 + 2x_3 + 2 \geq 0$$

$$x_1(x_1 - 1) = 0 \text{ (0 - 1 integer)}$$

$$x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_2x_3 = 0 \text{ (complementarity)}$$

多項式最適化問題(POP)

$$p^* = \min f_0(x) \text{ s.t. } f_j(x) \geq 0 \ (j = 1, \dots, m)$$

- さまざまな問題が多項式計画問題として定式化
- 組合せ最適化問題を含む非凸型最適化問題に対する大域最適化の統一的な枠組みを提供する.

目次

1. 多項式最適化問題
2. Lagrange緩和とLagrange双対問題
3. 2乗和多項式と一般化Lagrange双対問題
4. 数値例
5. おわりに

POP: $p^* = \min f_0(x)$ s.t. $f_j(x) \geq 0 (j = 1, \dots, m)$

Lagrange 関数:

$$L(x, \lambda) = f_0(x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j f_j(x) \quad (\forall (x, \lambda) \in R^n \times R_+^m)$$

固定された $\lambda \in R_+^m$ に対して, Lagrange 緩和問題

$$L^*(\lambda) = \min\{L(x, \lambda) : x \in R^n\}$$

このとき, $L^*(\lambda) \leq p^* (\forall \lambda \in R_+^m)$

証明

$$\begin{aligned} x: \text{許容解}, \lambda_j \geq 0 &\Rightarrow \lambda_j f_j(x) \geq 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^m \lambda_j f_j(x) \geq 0 \\ &\Rightarrow f_0(x) \geq f_0(x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j f_j(x) = L(x, \lambda) \\ &\geq \min\{L(x, \lambda) : x \text{ は許容解}\} \geq L^*(\lambda) \end{aligned}$$

POP: $p^* = \min f_0(x)$ s.t. $f_j(x) \geq 0 (j = 1, \dots, m)$

Lagrange 関数:

$$L(x, \lambda) = f_0(x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j f_j(x) \quad (\forall (x, \lambda) \in R^n \times R_+^m)$$

固定された $\lambda \in R_+^m$ に対して, Lagrange 緩和問題

$$L^*(\lambda) = \min\{L(x, \lambda) : x \in R^n\}$$

このとき, $L^*(\lambda) \leq p^* (\forall \lambda \in R_+^m)$

最良のLagrange緩和問題=Lagrange双対問題

$$L^* = \max\{L^*(\lambda) : \lambda \in R_+^m\}$$

このとき, $L^*(\lambda) \leq L^* \leq p^* (\forall \lambda \in R_+^m)$

一般には, 双対ギャップ $p^* - L^* > 0$ が存在する

POP: $p^* = \min f_0(x)$ s.t. $f_j(x) \geq 0 (j = 1, \dots, m)$

Lagrange 関数:

$$L(x, \lambda) = f_0(x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j f_j(x) \quad (\forall (x, \lambda) \in R^n \times R_+^m)$$

Lagrange緩和: $L^*(\lambda) = \min\{L(x, \lambda) : x \in R^n\}$

Lagrange双対問題: $L^* = \max\{L^*(\lambda) : \lambda \in R_+^m\}$

このとき, $L^*(\lambda) \leq L^* \leq p^* (\forall \lambda \in R_+^m)$

双対ギャップ $p^* - L^* > 0$ を0にしたい!

理想的な方法は, 罰金関数

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } f_i(x) \geq 0 \\ +\infty & \text{if } f_i(x) < 0 \end{cases}$$

目次

1. 多項式最適化問題
2. Lagrange緩和とLagrange双対問題
3. 2乗和多項式と一般化Lagrange双対問題
4. 数値例
5. おわりに

罰金関数を2乗和多項式で近似する

2乗和多項式の集合:

$$\Sigma = \left\{ \sum_{i=1}^k g_i(x)^2 : g_i(x) \text{ is a polynomial, } \forall k \right\}$$

例

$$n = 1, f(x) = (x - 4)^2 + (5x^3 - x^2 - x + 3)^2$$

$$n = 2, f(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2)^2 + (3x_1x_2 + x_2 - 4)^2$$

2乗和多項式の集合:

$$\Sigma = \left\{ \sum_{i=1}^k g_i(x)^2 : g_i(x) \text{ is a polynomial, } \forall k \right\}$$

一般化Lagrange関数

$$L(x, \lambda(x)) = f_0(x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j(x) f_j(x) \quad (\forall (x, \lambda(x)) \in R^n \times \Sigma^m)$$

一般化Lagrange双対問題:

$$\zeta^* = \max_{\lambda \in \Sigma^m} \min \{ L(x, \lambda(x)) : x \in R^n \}$$

一般に $\Rightarrow \zeta^* \leq p^*$ (POPの最小値)

POPの許容領域が有界 $\Rightarrow \zeta^* = p^*$

数値的に解くためには, 2乗和多項式の次数を r に制限して近似する必要がある.

次数 r 以下の2乗和多項式の集合:

$$\Sigma_r = \left\{ \sum_{i=1}^k g_i(x)^2 : g_i(x) \text{ is a polynomial with } \deg \leq r, \forall k \right\}$$

例

$$n = 1, f(x) = (x - 4)^2 + (5x^3 - x^2 - x + 3)^2 \in \Sigma_3$$

$$n = 2, f(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2)^2 + (3x_1x_2 + x_2 - 4)^2 \in \Sigma_2$$

次数 r 以下の2乗和多項式の集合:

$$\Sigma_r = \left\{ \sum_{i=1}^k g_i(x)^2 : g_i(x) \text{ is a polynomial with } \deg \leq r, \forall k \right\}$$

一般化Lagrange双対問題(次数 r 以下)

$$\begin{aligned} & \max_{\lambda \in \Sigma_r^m} \min \{ L(x, \lambda(x)) : x \in R^n \} \\ & \Leftrightarrow \max \zeta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{s.t. } L(x, \lambda(x)) - \zeta \geq 0 \quad (x \in R^n), \lambda \in \Sigma_r^m \\ & \Rightarrow \zeta_r^* = \max \zeta \end{aligned}$$

$$\text{s.t. } L(x, \lambda(x)) - \zeta \in \Sigma_r \quad (x \in R^n), \lambda \in \Sigma_r^m$$

一般に $\zeta_r^* \leq \zeta_{r+1}^* \leq p^*$. 緩い条件の下で $\zeta_r^* \rightarrow p^*$

半正定値計画問題として解ける.

目次

1. 多項式最適化問題
2. Lagrange緩和とLagrange双対問題
3. 2乗和多項式と一般化Lagrange双対問題
4. 数値例
5. おわりに

一般化されたRosenbrock関数の最小化

$$f(x) = 1 + \sum_{i=2}^n (100(x_i - x_{i+1}^2)^2 + (1 - x_i)^2)$$

n	精度	計算時間(秒)
600	3.9e-7	3.4
700	7.5e-9	4.0
800	2.1e-7	5.1
900	2.1e-7	5.9
1000	4.5e-7	5.9

精度=(近似最適値－最適値の下界値)／|最適値の下界値|

近似最適解と最適値の下解値 $\Rightarrow$ **大域的最適解の精度保証**

多項式の疎性を活用している！

alkyl.gms : a benchmark problem from globallib

$$\begin{aligned}
\min \quad & -6.3x_5x_8 + 5.04x_2 + 0.35x_3 + x_4 + 3.36x_6 \\
\text{sub.to} \quad & -0.820x_2 + x_5 - 0.820x_6 = 0, \\
& 0.98x_4 - x_7(0.01x_5x_{10} + x_4) = 0, \\
& -x_2x_9 + 10x_3 + x_6 = 0, \\
& x_5x_{12} - x_2(1.12 + 0.132x_9 - 0.0067x_9^2) = 0, \\
& x_8x_{13} - 0.01x_9(1.098 - 0.038x_9) - 0.325x_7 = 0.574, \\
& x_{10}x_{14} + 22.2x_{11} = 35.82, \\
& x_1x_{11} - 3x_8 = -1.33, \\
& \text{lbd}_i \leq x_i \leq \text{ubd}_i \ (i = 1, 2, \dots, 14).
\end{aligned}$$

		Sparse			Dense		
problem	n r	ϵ_{obj}	ϵ_{feas}	cpu	ϵ_{obj}	ϵ_{feas}	cpu
alkyl	14 2	4.1e-03	2.7e-01	0.9	6.3e-06	1.8e-02	17.6
alkyl	14 3	5.6e-10	2.0e-08	6.9	—	—	—

r = relaxation order,

$$\epsilon_{\text{obj}} = \frac{|\text{the lower bound for opt. value} - \text{the approx. opt. value}|}{\max\{1, |\text{the lower bound for opt. value}|\}},$$

ϵ_{feas} = the maximum error in the equality constraints,

cpu : cpu time in sec. to solve an SDP relaxation problem.

目次

1. 多項式最適化問題
2. Lagrange緩和とLagrange双対問題
3. 2乗和多項式と一般化Lagrange双対問題
4. 数値例
5. おわりに

大域的最適化のための数値計算手法としては非常に強力.

発展途中段階 --- 課題

- 大規模半正定値計画問題を解く必要がある
- 多項式の疎性の有効利用
- 数値的な安定性

理論的には多項式半正定値計画問題
(多項式行列不等式)に拡張されている