数理計画法

−− 最適化のための数理工学 −−

東京工業大学大学院 情報理工学研究科

数理・計算科学専攻

小島 政和

興味ある人のために，このスライドは以下のホームページにおいてあります．
http://www.is.titech.ac.jp/∼kojima/wabun.html

はじめに

- 「最初に目的(目標)があって，次にその目的を達成するためのより良い手段をとる」ことが“最適化”の本質
- 普段の生活においても，他人と話すときでも，人生設計においても，まず,“何をやりたいか”(目標, 目的)から始める．
- 数理計画は，最適化ための数理工学.
- 製品開発･設計, 工場での生産計画, 輸送計画, 航空機とその乗務員の割り当ておよびスケジューリング, ファイナンス, 情報通信ネットワークの最適利用計画等のさまざまな分野で使われてる．
- そのような分野で生ずる数理計画問題は規模が大きく，問題の数学的な構造に基づいて効率のよいアルゴリズムを設計し, 高速な計算機を利用しないと解くことが出来ない．
- この講義では，最適化の必要性, 簡単な例を通して，数理計画の基本的な考え方等を概説.

興味ある人のために，このスライドは以下のホームページにおいてあります．
http://www.is.titech.ac.jp/∼kojima/wabun.html

目次

1. 最適化(Optimization)とは？
2. “最適化”が必要な例
3. 数理計画法(Mathematical Programming)
   — 最適化のための数理工学
4. 線形計画問題(Linear Progrmming)
   — 最も基本的な数理計画モデル
5. “最適化”の背景にある基本的な考え方

Computer Sciecne (計算機科学), 数学

Operations Research (オペレーションズ・リサーチ)

Mathematical Programming (数理計画法)

1. 最適化とは？

目的 — 例えば

学生

- 数学科に入りたい
- 物理学者になりたい
- 商社に入って世界中を駆け回りたい

学科，大学，大学院

- 優秀な学生を集めたい
- 優秀な学生を育てたい

企業 — 数理科学的な方法が有用

- 売り上げをのばしたい
- 生産コストを下げたい

目的を“よりよく”達成するために何をすればよいのか？何ができるのか？

さまざまな情報
⇓
意思決定者
⇓
手段の選択，決定，行動

高度な情報処理技術— これを支えるのは**数学，計算機科学**

数理科学的な手法は役に立つか？

- さまざまな目的を達成するための意思決定，特に，組織（企業，大学，病院等）を強力に支援するさまざまな数理科学的な手法が開発されている．
- 万能ではない

2. “最適化” が 必要な例

企業の 経済活動の さまざまな局面

- 生産計画
- 施設配置，輸送
- 人員配置
- 仕事の スケジューリング
- 投資，金融商品の 開発

工学分野

- 建造物の 構造最適化
- 石油精製
- LSI の 設計
- 電力の 最適供給

大学

- 時間割り，教室割り当て
- 入学者の 選抜，学科所属

生産計画：
$$\left.\begin{array}{l}\text{原料}\\ \text{エネルギー}\\ \text{労働力}\\ \cdots\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{製造}\\ \text{在庫}\\ \text{輸送}\\ \cdots\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{顧客}$$

単一品種の大量生産 $\Longrightarrow$ 多様な生産

— ある自動車会社の例 — 顧客の要求の多様化

- 多くの車種(エンジン，ボディ等)
- 多くのオプション(パワーウィンドウ，エアバッグ)

⇓

非常に多くの部品の管理 $\Longrightarrow$ コスト

部品には他の部品と代替できるものがあるので，高い部品を付け捨てしても部品数を減らして管理コストをさげる．付け捨てした部品は顧客からは見えないようにする．

⇓

部品間の代替，選択，生産量に関する最適化問題

施設配置，輸送

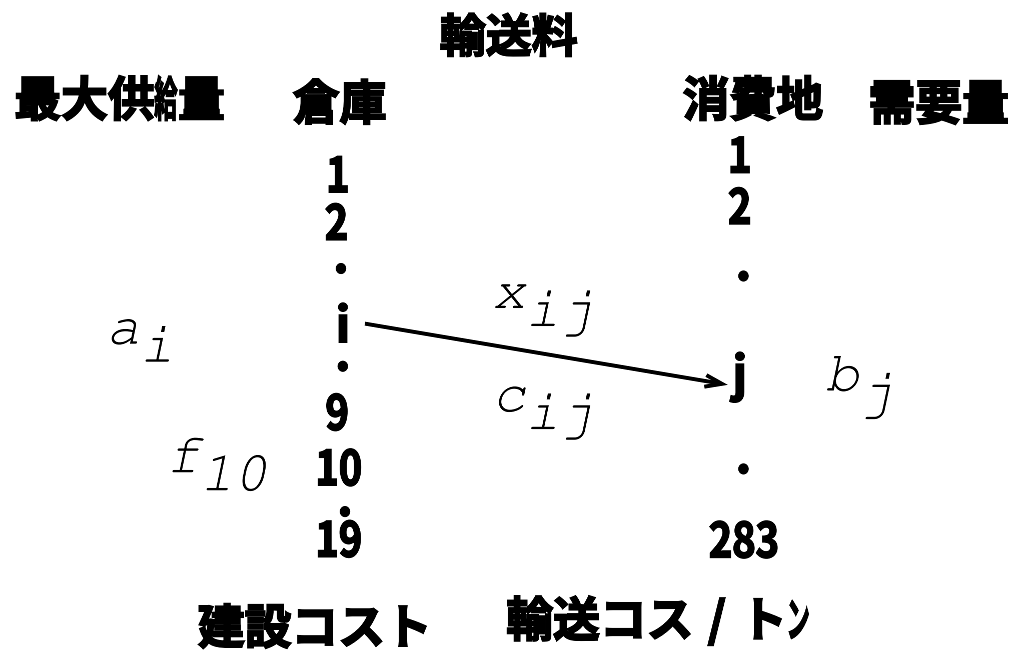
全国 9 箇所に倉庫を持っていて，そこから 283 箇所の消費地に商品を輸送している．需要増加にともない 20 箇所ある候補地の何カ所かに倉庫を建設したい．需要を満たし，かつ，輸送に関わるコストを最小にしたい．

データ

- a_i : 倉庫 i の最大供給量 (トン/日) $(i = 1, 2, \ldots, 29)$
- b_j : 消費地 j での需要量 (トン/日) $(j = 1, 2, \ldots, 283)$
- c_{ij} : 倉庫 i から消費地 j への輸送コスト (千円/トン)
- f_i : 倉庫 i の建設コスト $+$ 維持費 (千円/日)

制御できる変量

- $S \subset \{10, \ldots, 29\}$: 建設する倉庫
- x_{ij} : 倉庫 i から消費地 j への輸送量 (トン/日)



目的： $$\sum_{i\in\{1,\ldots,9\}\cup S}\ \sum_{j=1}^{283} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i\in S} f_i \ \rightarrow\ \text{最小化}$$

条件： $$\sum_{j=1}^{283} x_{ij} \leq a_i \ (i \in \{1,\ldots,9\}\cup S)$$

$$\sum_{i\in\{1,\ldots,9\}\cup S} x_{ij} = b_j \ (j = 1,2,\ldots,283)$$

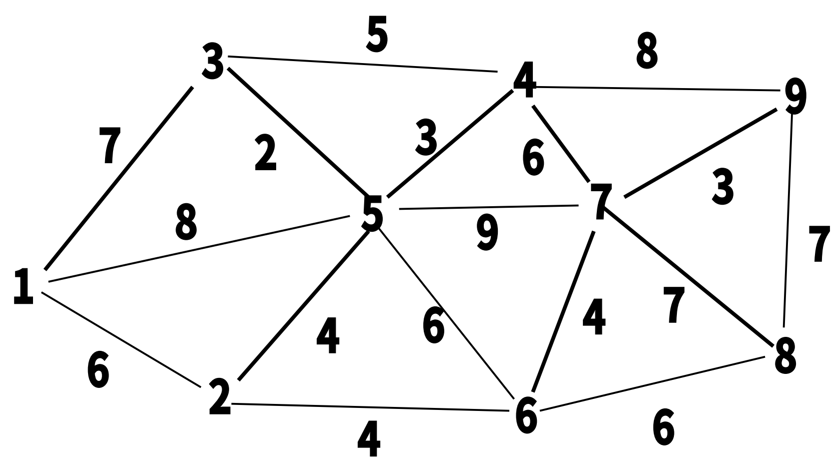
$$x_{ij} \geq 0 \ (j = 1,2,\ldots,283,\ i \in \{1,\ldots,9\}\cup S)$$

人員配置

- 航空会社の乗務員
  考慮すべき要因 —— 空港，飛行機，乗務員，フライトスケジュール等
- コンビニ，飲食店等でのアルバイト学生

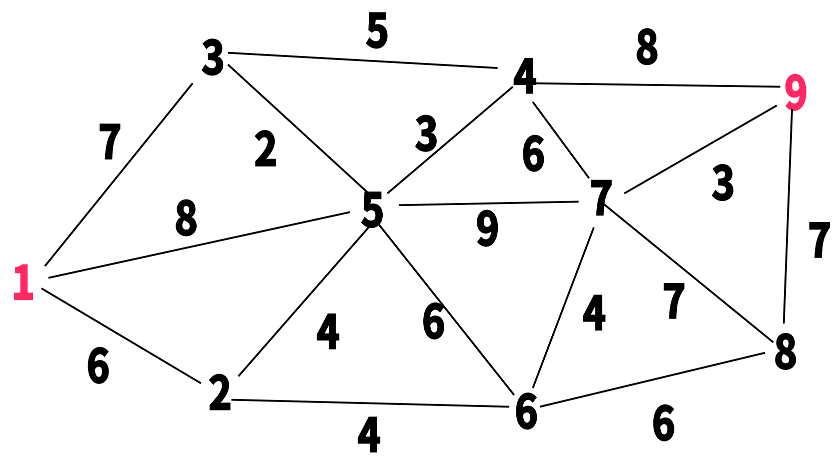
情報通信ネットワーク

- 通信路の動的な決定
- ネットワークの設計
-

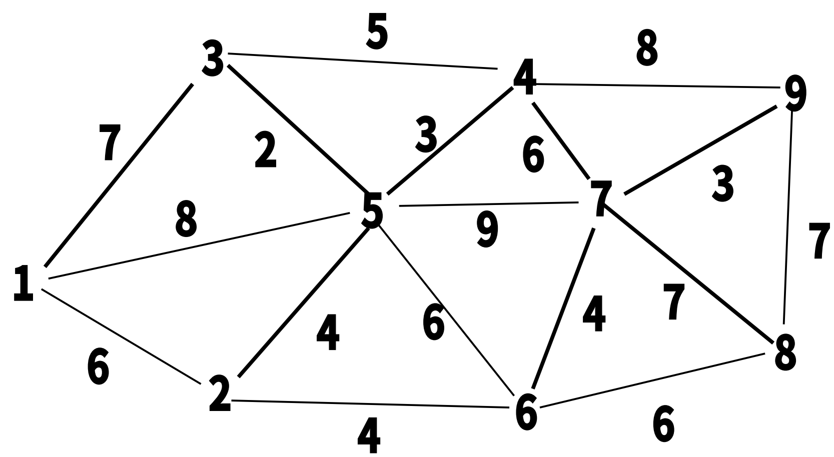


ネットワーク上の最適化問題の例

最短路問題：都市1から都市9への最短路を計算せよ．

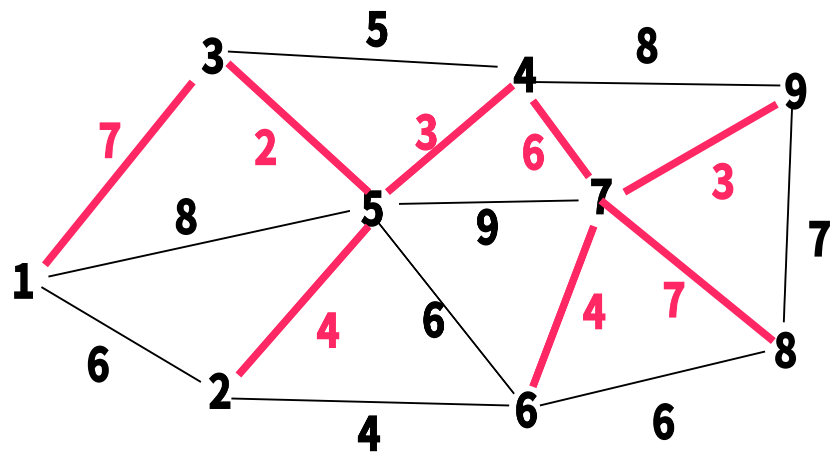


巡回セールスマン問題：９都市すべてを最短時間で回りたい．



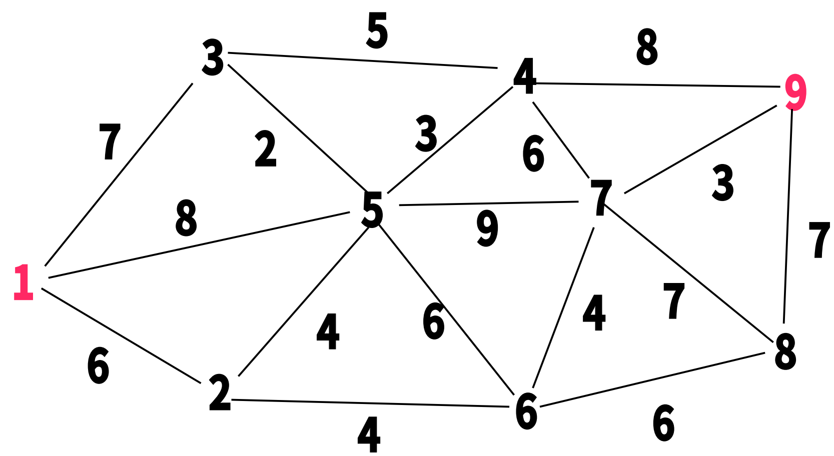
最小木問題： ９都市すべてを結ぶネットワークを設計したい．ただし，ネットワークの総ケーブル長を最小にしたい．

例えば



総ケーブル長= $7+2+4+3+6+4+7+3$

最大流問題：９都市の石油パイプライン網が与えられたとき，都市1から都市9へ流せる最大の石油量を計算せよ．



金融関係

- 投資
- 資金の調達
- 金融商品の評価，新商品の開発
-

3. 数理計画法 — 最適化のための理工学

実社会で必要なさまざまな最適化問題

⇓

数理モデル — 研究対象

特に，基礎的で汎用性の高い数理モデルに対する

- 高速な数値計算手法を開発
- 解の性質（安定性，感度分析）の研究

一般の 標準的な数理計画問題

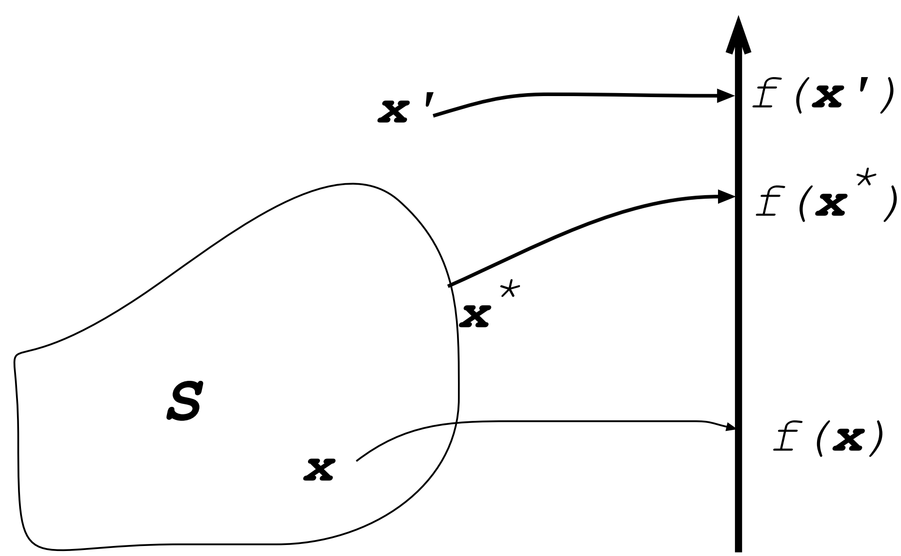
$$R^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \text{ は 実数}\} \ (n \text{ 次元空間})$$

$$S \subset R^n, \ (\text{許容領域})$$

$$f \ : \ R^n \to R, \ (\text{目的関数}) \ (n \text{次元空間で定義された実数値関数})$$

$$\boxed{\text{目的}: \ f(x) \to \text{最大化}; \ \text{条件}: \ x \in S}$$

目的関数値



一般の標準的な数理計画問題

$$R^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \text{ は実数}\} \ (n \text{ 次元空間})$$
$$S \subset R^n, \ (\text{許容領域})$$
$$f : R^n \to R, \ (\text{目的関数}) \ (n \text{ 次元空間で定義された実数値関数})$$

目的： $f(x) \to$ 最大化; 条件： $x \in S$

通常，許容領域 S は

$$S = \{x \in T : g_j(x) \le 0 \ (j = 1, 2, \ldots, m)\}$$

と表現される．ただし，g_j は R^n で定義された実数値関数．R^n の部分集合 T は不等式では表現しにくい条件，例えば

$$T = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n : x_i \text{ は整数}\},$$
$$T = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n : x_i \text{ は } 0 \text{ または } 1\}$$

等を S に組み入れるのに使われる．

数理計画問題の難しさ — 計算は computer を用いて行われるが，記憶領域は有限で，有限の時間では，有限桁の計算を有限回しか行うことが出来ない．

$\Longrightarrow$ **万能手法はない．さまざまな数理計画モデルのそれぞれに対して，多くの手法が提案されている**

4. 線形計画問題 — 最も基本的な数理計画モデル

$c_j,\ b_i,\ a_{ij}$: 実定数, x_j : 実変数 $(j = 1, 2, \ldots, n,\ i = 1, 2, \ldots, m)$

線形計画問題

目的 : $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to$ 最大化

条件 : $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i\ (i = 1, 2, \ldots, m)$

飼料混合問題 — 線形計画問題の例

m 種類の栄養素(ビタミン，ミネラル，蛋白質，カロリー等), n 種類の飼料

c_j : 第 j 飼料 1kg 当たりの値段, b_i : 第 i 栄養素1ヶ月当たりの必要量

a_{ij} : 第 j 飼料 1kg が含んでいる第 i 栄養素の量

栄養の条件を満たして，最もやすく混合飼料を作りたい．

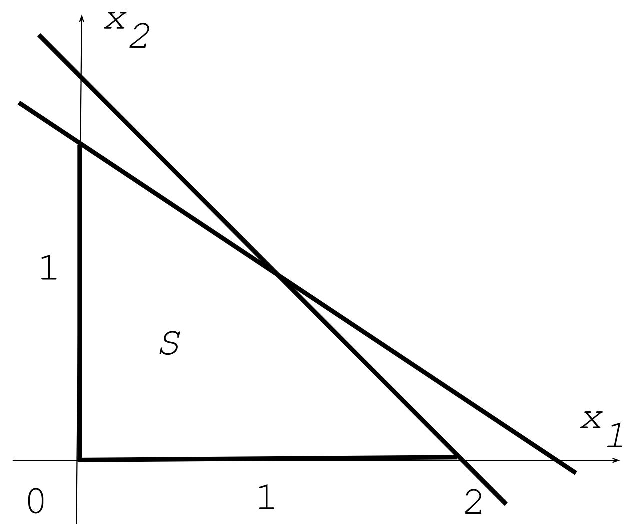
x_j : 第 j 飼料の購入量

$i \setminus j$	1	2	...	n	栄養素必要量
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
.	.	.	...	.	.
m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m
飼料 j 値段	c_1	c_2	...	c_n	
飼料 j 購入量	x_1	x_2	...	x_n	

目的: $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \longrightarrow$ 最小化

条件: $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \ (i = 1, \ldots, m), \ x_j \geq 0 \ (j = 1, \ldots, n)$

簡単な線形計画問題の例



目的： $x_1 + 2x_2 \longrightarrow$ 最大化

条件： $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,$

$$x_1 + x_2 \leq 2,$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 5.$$

線形計画問題の特徴

(a) 許容領域 S は有限個の超平面で囲まれた多面集合で，有限個の頂点を持つ．

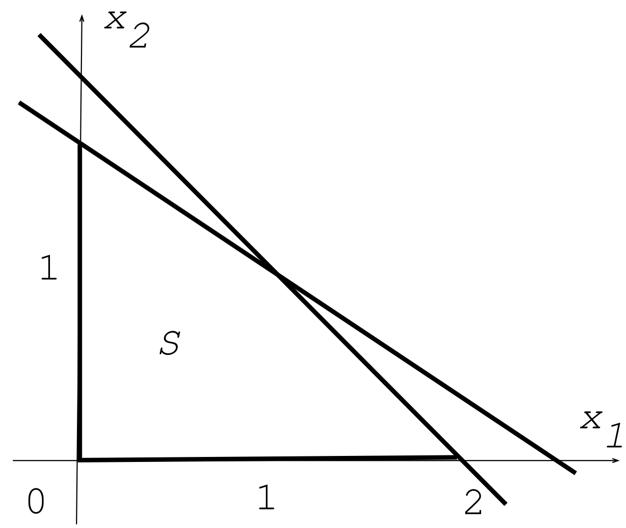
(b) 最小点は頂点で達成される

シンプレックス法

1. 頂点を1つ見つける $\longrightarrow$ 初期頂点
2. 初期頂点から隣の頂点をたどって最小点に達する

代数的には線形方程式に対する消去演算

簡単な線形計画問題の例



目的： $x_1 + 2x_2 \to$ **最大化**

条件： $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,$

$x_1 + x_2 \leq 2,$

$2x_1 + 3x_2 \leq 5.$

- 実社会から起こるさまざまな問題が線形計画問題に帰着できる
- 規模が大きい（例えば，$n,\ m \geq 100$）と "賢い方法" を使わないと解けない
- どの程度の規模の問題を解くことが要請されているか？

- 現時点ではどの程度の規模の問題が解けるか？

5. “最適化” の背景にある基本的な考え方

- 目的から始める．すなわち，“何が出来るか”，“どんな規則・条件があるか”，“どんな方法があるか”は後で考慮する．まず，最初に何がやりたいか？
- Top $\Longrightarrow$ down で考える．より上位の目的から，下位の目的へ．常に大域的な最適化を優先する．

こんな考え方は役に立つか？ $\Rightarrow$ 数理科学的な方法を適用する際の問題点

(a) 目的がない．習慣，惰性で行動 — “最適化” 以前

(b) 目的不明確． (c) 目的はあるが，数量化されない．数量化しにくい．

(d) 多くの目的がある．

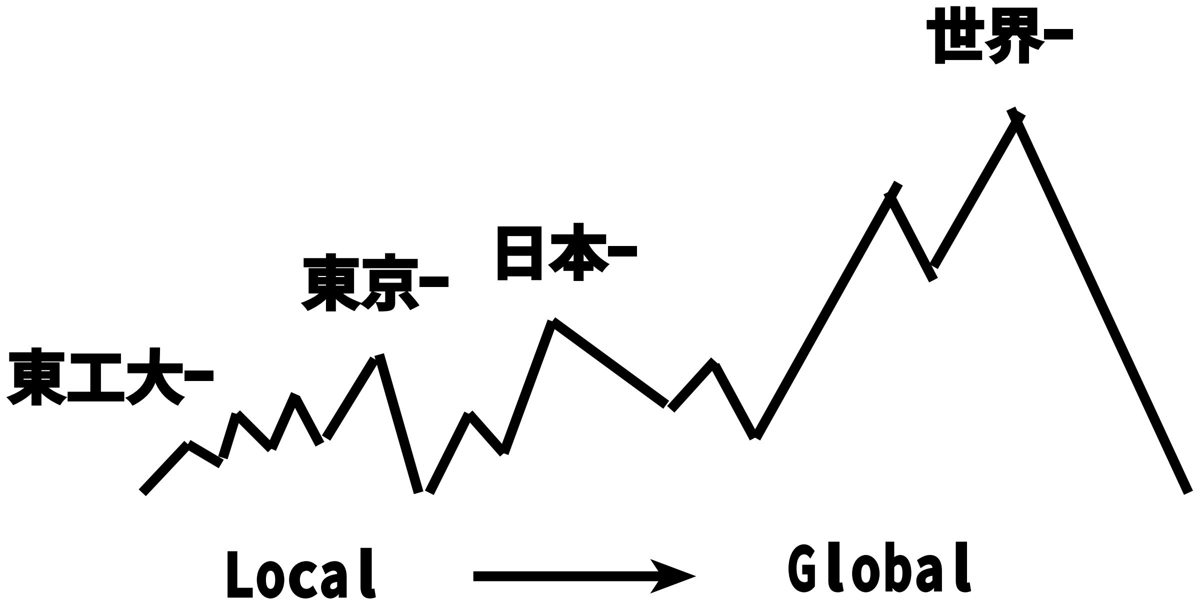
— 数理科学的な方法が多く提案されている

(e) 時間とともに目的は変化. (f) 時間とともに状況が変化. (g) 未来は不確実.

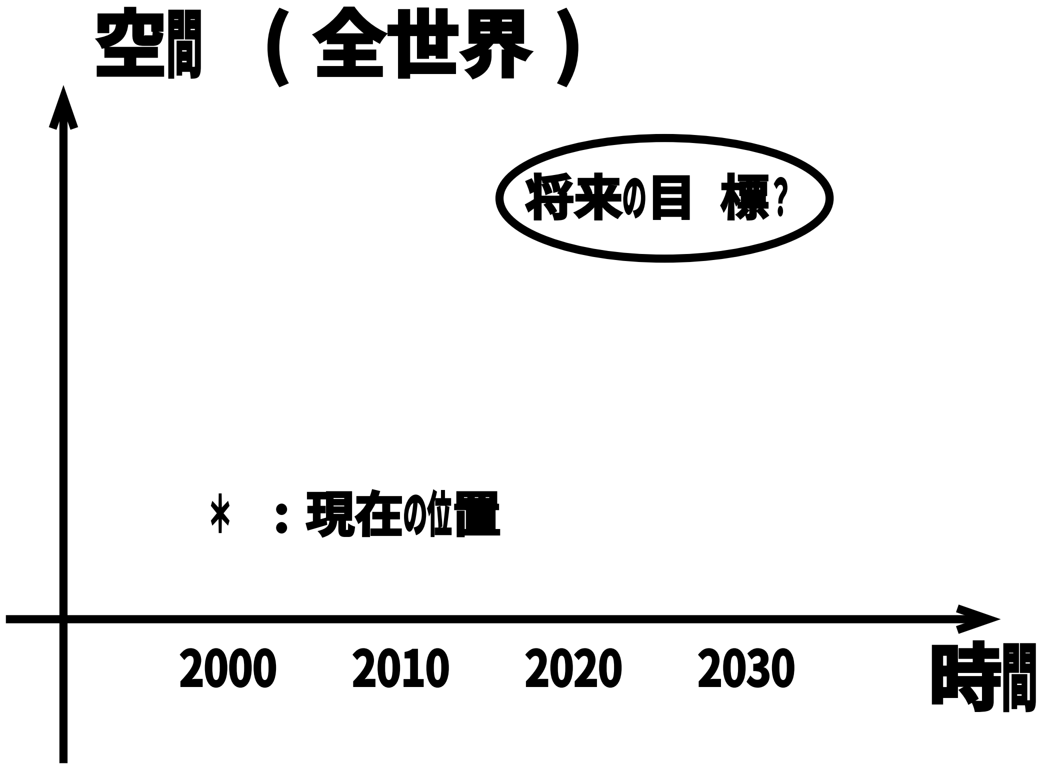
— 数理科学的な方法の対象内

- 数理科学的な方法論には馴染まない領域がある．

Local Optimum (局所最適)と Global Optimum (大域最適)



より 大域 的に



目標を 達成する ために 現在何を しておくことが 最適か ？