半正定値行列補完における双対性と
その SDP への応用

東京工業大学　情報理工学研究科
数理・計算科学専攻

小島政和

「計算と最適化の新展開」研究部会（SCOPE）

中央大学 後楽園キャンパス

２００９年３月２１日

- Kim,Koj,Mevissen,Yamashita Jan.09 — 理論
- Fukuda,Nakata,Fujisawa,Kojima,Murota '01, '03 の拡張
- Fujisawa,Kim,Koj,Okamoto,Yamashita Feb.09 — Software

目次

目次

半正定値計画問題 (SDP) は線形計画 (LP) の拡張

LP: minimize $-X_{11} - 2X_{12} - 5X_{22}$

subject to $2X_{11} + 3X_{12} + X_{22} = 7,\ X_{11} + X_{12} \geq 1,$

$X_{11} \geq 0,\ X_{12} \geq 0,\ X_{22} \geq 0.$

SDP: minimize $-X_{11} - 2X_{12} - 5X_{22}$

subject to $2X_{11} + 3X_{12} + X_{22} = 7,\ X_{11} + X_{12} \geq 1,$

$X_{11} \geq 0,\ X_{12} \geq 0,\ X_{22} \geq 0,$

$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12} & X_{22} \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O}$ (半正定値).

- 共通：実変数 $X_{11},\ X_{12},\ X_{22}$ に関する線形目的関数
- 共通：実変数 $X_{11},\ X_{12},\ X_{22}$ に関する線形等式・不等式条件
- 違い：SDP：半正定値条件
- 共通：許容領域は凸．違い：多面体 VS 凸集合
- 共通：主双対内点法

半正定値計画問題 (SDP) は線形計画 (LP) の拡張

LP: minimize $-X_{11} - 2X_{12} - 5X_{22}$

subject to $2X_{11} + 3X_{12} + X_{22} = 7,\ X_{11} + X_{12} \geq 1,$

$X_{11} \geq 0,\ X_{12} \geq 0,\ X_{22} \geq 0.$

SDP: minimize $-X_{11} - 2X_{12} - 5X_{22}$

subject to $2X_{11} + 3X_{12} + X_{22} = 7,\ X_{11} + X_{12} \geq 1,$

$X_{11} \geq 0,\ X_{12} \geq 0,\ X_{22} \geq 0,$

$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12} & X_{22} \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O}$ (半正定値).

半正定値計画問題 (SDP) は線形計画 (LP) の拡張

LP: minimize $-X_{11} - 2X_{12} - 5X_{22}$

subject to $2X_{11} + 3X_{12} + X_{22} = 7,\ X_{11} + X_{12} \geq 1,$

$X_{11} \geq 0,\ X_{12} \geq 0,\ X_{22} \geq 0.$

SDP: minimize $-X_{11} - 2X_{12} - 5X_{22}$

subject to $2X_{11} + 3X_{12} + X_{22} = 7,\ X_{11} + X_{12} \geq 1,$

$X_{11} \geq 0,\ X_{12} \geq 0,\ X_{22} \geq 0,$

$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12} & X_{22} \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O}$ (半正定値).

$n \times n$ 実対称行列 $\boldsymbol{A}$: 半正定値

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ の固有値がすべて非負, または,

2 次形式 $\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{u} \geq 0$ for $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$

例：分散共分散行列

半正定値計画問題の応用例

- システムと制御 — 線形行列不等式
- Robust Optimization
- 機械学習
- 金融工学
- 建造物の構造安定性解析
- 量子化学
- 量子計算
- モーメント問題，モーメント行列 (応用確率論)
- 半正定値計画緩和
  - グラフの最大カット問題，最大クリーク問題
  - Sensor Network Localization Problem
  - 多項式最適化問題
- . . .

Classification of Optimization Problems

Continuous ← → Discrete

Convex ← Continuous → Nonconvex

Convex
$\cup$
Linear Optimization Problem over Symmetric Cone
$\cup$
SemiDefinite Program
$\cup$
Second Order Cone Program
$\cup$
Convex Quadratic Optimization Problem
$\cup$
Linear Program

Discrete
$\cup$
0-1 Integer LP & QOP
$\cap$
Polynomial Optimization Problem
$\cap$
POP over Symmetric Cone
$\cup$
Bilinear Matrix Inequality

Nonconvex → Polynomial Optimization Problem

SemiDefinite Program — relaxation → Polynomial Optimization Problem, POP over Symmetric Cone

等式標準形 SDP とその双対問題

$$\text{主問題} \quad \min \quad \boldsymbol{A}_0 \bullet \boldsymbol{X}$$
$$\text{sub.to} \quad \boldsymbol{A}_p \bullet \boldsymbol{X} = b_p \ (1 \leq p \leq m), \ \mathbb{S}^n \ni \boldsymbol{X} \succeq \boldsymbol{O}.$$

$\mathbb{S}^n$: $n \times n$ 対称行列からなる線形空間,

$\boldsymbol{A}_p \in \mathbb{S}^n$: データ, $n \times n$ 対称行列 $(0 \leq p \leq m)$,

$b_p \in \mathbb{R}$: データ, 実数 $(1 \leq p \leq m)$,

$\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n$: $n \times n$ 変数, 対称行列;

$$\boldsymbol{X} = (X_{ij}) = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^n,$$

$\boldsymbol{A}_p \bullet \boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [\boldsymbol{A}_p]_{ij} \boldsymbol{X}_{ij}$ (内積)

$$\text{双対問題} \quad \max \quad \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y}$$
$$\text{sub.to} \quad \boldsymbol{A}_0 - \sum_{p=1}^m \boldsymbol{A}_p y_p \succeq \boldsymbol{O}.$$

3 種類の疎性：簡単な例題　　$\boldsymbol{A}_0 : n \times n$ 3 重対角

$$\min \sum_{i=1}^{n-1} \left(A^0_{ii} X_{ii} + A^0_{i,i+1} X_{i,i+1} + A^0_{i+1,i} X_{i+1,i} \right) + A^0_{nn} X_{nn} \quad \text{— (1)}$$

sub. to　(行列不等式, 対角+縁付き)

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} 1 - X_{11} & 0 & \dots & X_{12} \\ 0 & 1 - X_{22} & \dots & X_{23} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ X_{21} & X_{32} & \dots & 1 - X_{nn} \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O} \quad \text{— (2)}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nn} \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O} \quad \text{(半正定値条件)}$$

- domain-space sparsity — (1), (2) で使われている変数 X_{ij} ?
- range-space sparsity — (2) は対角+縁付き
- (隠れた) 相関疎性 — (2) では各 X_{ij} はたかだか 1 回出現

3 種類の疎性：簡単な例題

$\Downarrow$ 疎性を活用した変換を適用

$$\min \sum_{i=1}^{n-1} \left(A^0_{ii} X_{ii} + 2A^0_{i,i+1} X_{i,i+1} \right) + A^0_{nn} X_{nn} \quad \text{sub.to}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_{11} & -X_{12} \\ -X_{12} & -z_1 \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_{ii} & -X_{i,i+1} \\ -X_{i,i+1} & z_{i-1} - z_i \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O} \ (i = 2, 3, \ldots, n-2),$$

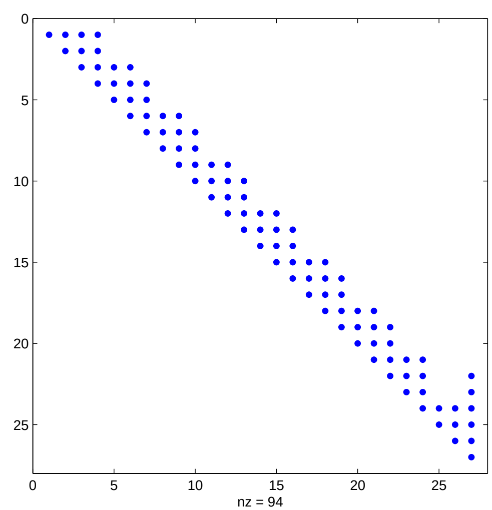
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_{n-1,n-1} & -X_{n-1,n} \\ -X_{n-1,n} & X_{n,n} + z_{n-2} \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O},$$

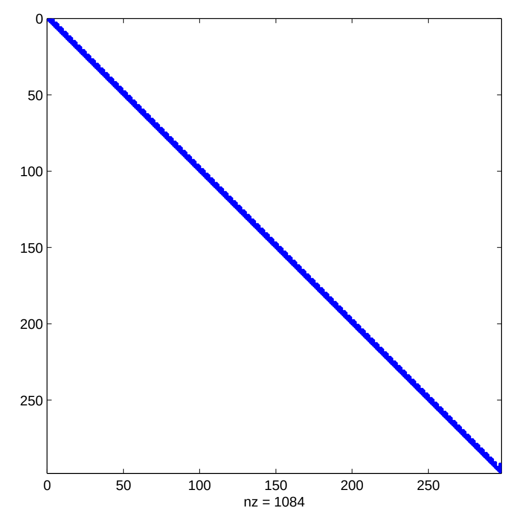
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -X_{ii} & -X_{i,i+1} \\ -X_{i,i+1} & -X_{i+1,i+1} \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O} \ (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

- $3n-3$ 変数
- $3n-3$ 個の 2×2 行列不等式

3 種類の疎性：簡単な例題

	計算時間，秒 (Schur 補完行列のサイズ)	
n	変換前	変換後
10	0.2 (55)	0.1 (27)
100	1091.4 (5,050)	0.6 (297)
1000	-	6.3 (2,997)
10000	-	99.2 (29,997)





- 変換後の SDP の Schur 補完行列 (主双対内点法の各反復で解く線形方程式の正定値な係数行列) の疎性 ($n = 10,\ 100$)
- 変換前は完全に密な行列

目次

例題

3×3 不完全対称行列

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & \\ 3 & 3 & 2 \\ & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

は, $(1,3)$ 要素 $=$ $(3,1)$ 要素に 2 を定めて，3×3 半正定値対称行列

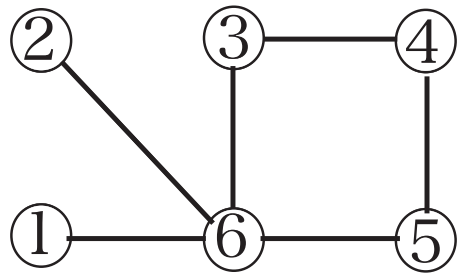
$$\overline{\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

に補完できる.

- $(1,3)$ 要素 $=$ $(3,1)$ 要素 $= 0$ では半正定値にはならない！

$$
\begin{aligned}
G(N,E) &\quad : \quad \text{無向 graph, } N=\{1,2,\ldots,n\},\ E = N\times N \\
E^{\bullet} &\quad = \quad E\cup\{(i,i) : i\in N\}, \\
\mathbb{S}^n(E,?) &\quad = \quad E^{\bullet}\text{ の要素のみ値をもつ } n\times n \text{ 不完全対称行列の集合} \\
\mathbb{S}^n_+(E,?) &\quad = \quad \{\boldsymbol{X}\in\mathbb{S}^n(E,?) : \exists\overline{\boldsymbol{X}}\in\mathbb{S}^n_+; \overline{X}_{ij} = X_{ij} \text{ if } (i,j)\in E^{\bullet}\}
\end{aligned}
$$

ただし, (i,j) と (j,i) は同一視, (i,i) は E には含まれない



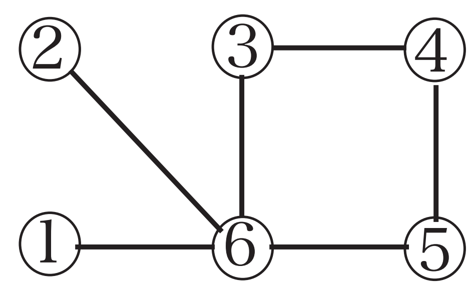
$$
\mathbb{S}^6(E,?) = \left\{ \begin{pmatrix}
X_{11} & & & & & X_{16} \\
& X_{22} & & & & X_{26} \\
& & X_{33} & X_{34} & & X_{36} \\
& & X_{43} & X_{44} & X_{45} & \\
& & & X_{54} & X_{55} & X_{56} \\
X_{61} & X_{62} & X_{63} & & X_{65} & X_{66}
\end{pmatrix} \right\}.
$$

$$
\begin{aligned}
G(N,E) &\ : \ \text{無向 graph, } N=\{1,2,\ldots,n\},\ E = N \times N \\
E^{\bullet} &= E \cup \{(i,i) : i \in N\}, \\
\mathbb{S}^n(E,?) &= E^{\bullet} \text{ の要素のみ値をもつ } n \times n \text{ 不完全対称行列の集合} \\
\mathbb{S}^n_+(E,?) &= \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n(E,?) : \exists \overline{\boldsymbol{X}} \in \mathbb{S}^n_+; \overline{X}_{ij} = X_{ij} \text{ if } (i,j) \in E^{\bullet}\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
G(N,E) & : & \text{無向 graph, } N = \{1,2,\ldots,n\},\ E = N \times N \\
E^{\bullet} & = & E \cup \{(i,i) : i \in N\}, \\
\mathbb{S}^n(E,?) & = & E^{\bullet} \text{ の要素のみ値をもつ } n \times n \text{ 不完全対称行列の集合} \\
\mathbb{S}^n_+(E,?) & = & \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n(E,?) : \exists \overline{\boldsymbol{X}} \in \mathbb{S}^n_+;\ \overline{X}_{ij} = X_{ij} \text{ if } (i,j) \in E^{\bullet}\} \\
\mathbb{S}^C & = & \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n : X_{ij} = 0 \text{ if } (i,j) \notin C \times C\}\ \ \forall C \subseteq N \\
\boldsymbol{X}(C) & = & \widetilde{\boldsymbol{X}} \in \mathbb{S}^C;\ \widetilde{X}_{ij} = X_{ij}\ ((i,j) \in C \times C)\ \forall \boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n
\end{array}
$$

例えば，$C = \{3,6\} \subset N$ のとき，$\boldsymbol{X}(C)$

$$
\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix}
X_{11} & & & & & X_{16} \\
 & X_{22} & & & & X_{26} \\
 & & X_{33} & X_{34} & & X_{36} \\
 & & X_{43} & X_{44} & X_{45} & \\
 & & & X_{54} & X_{55} & X_{56} \\
X_{61} & X_{62} & X_{63} & & X_{65} & X_{66}
\end{pmatrix}
$$

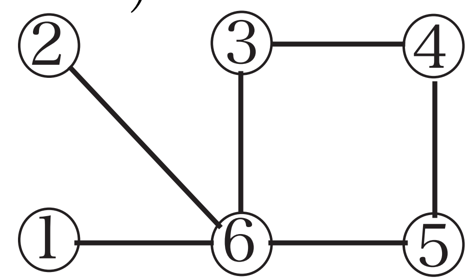


$G(N,E)$

- $\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n(E,?)$ とする．$\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n_+(E,?) \Rightarrow \boldsymbol{X}(C) \succeq \boldsymbol{O}\ \forall$ clique C
- $G(N,E)$ が chordal graph であれば “$\Leftarrow$” も真

$$
\begin{aligned}
G(N,E) &: \text{無向 graph, } N = \{1,2,\ldots,n\},\ E = N \times N \\
E^{\bullet} &= E \cup \{(i,i) : i \in N\}, \\
\mathbb{S}^n(E,?) &= E^{\bullet} \text{ の要素のみ値をもつ } n \times n \text{ 不完全対称行列の集合} \\
\mathbb{S}^n_+(E,?) &= \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n(E,?) : \exists \overline{\boldsymbol{X}} \in \mathbb{S}^n_+; \overline{X}_{ij} = X_{ij} \text{ if } (i,j) \in E^{\bullet}\} \\
\mathbb{S}^C &= \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n : X_{ij} = 0 \text{ if } (i,j) \notin C \times C\} \ \ \forall C \subseteq N \\
\boldsymbol{X}(C) &= \widetilde{\boldsymbol{X}} \in \mathbb{S}^C; \widetilde{X}_{ij} = X_{ij}\ ((i,j) \in C \times C)\ \forall \boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n
\end{aligned}
$$

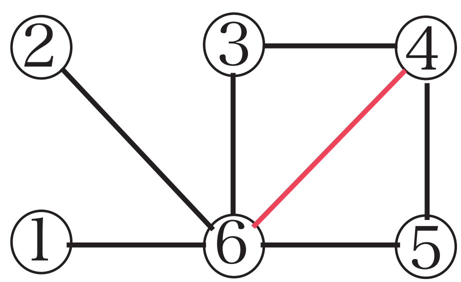
$$
\begin{aligned}
G(N,E) &\;:\; \text{無向 graph}, N = \{1,2,\ldots,n\}, E = N \times N \\
E^{\bullet} &= E \cup \{(i,i) : i \in N\}, \\
\mathbb{S}^n(E,?) &= E^{\bullet} \text{ の要素のみ値をもつ } n \times n \text{ 不完全対称行列の集合} \\
\mathbb{S}^n_+(E,?) &= \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n(E,?) : \exists \overline{\boldsymbol{X}} \in \mathbb{S}^n_+ ; \overline{X}_{ij} = X_{ij} \text{ if } (i,j) \in E^{\bullet}\} \\
\mathbb{S}^C &= \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n : X_{ij} = 0 \text{ if } (i,j) \notin C \times C\} \;\; \forall C \subseteq N \\
\boldsymbol{X}(C) &= \widetilde{\boldsymbol{X}} \in \mathbb{S}^C ; \widetilde{X}_{ij} = X_{ij} \; ((i,j) \in C \times C) \; \forall \boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n
\end{aligned}
$$



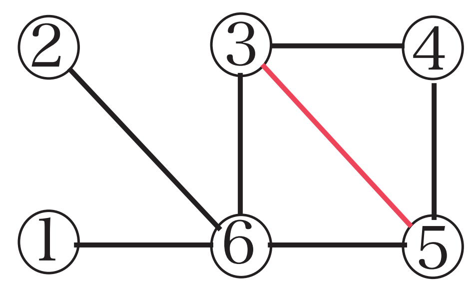
$G(N,E)$

$\Downarrow$ chordal 拡張

$\boxed{G(N,E) : \text{chordal} \Leftrightarrow \text{任意の長さ 4 以上の cycle は chord を持つ}}$



(a)



(b)

$$
\begin{aligned}
G(N,E) &\quad : \quad \text{無向 graph, } N = \{1,2,\ldots,n\}\text{, } E = N \times N \\
E^\bullet &= E \cup \{(i,i) : i \in N\}, \\
\mathbb{S}^n(E,?) &= E^\bullet \text{ の要素のみ値をもつ } n \times n \text{ 不完全対称行列の集合} \\
\mathbb{S}^n_+(E,?) &= \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n(E,?) : \exists \overline{\boldsymbol{X}} \in \mathbb{S}^n_+; \overline{X}_{ij} = X_{ij} \text{ if } (i,j) \in E^\bullet\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{S}^C &= \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n : X_{ij} = 0 \text{ if } (i,j) \notin C \times C\} \ \ \forall C \subseteq N \\
\boldsymbol{X}(C) &= \widetilde{\boldsymbol{X}} \in \mathbb{S}^C; \widetilde{X}_{ij} = X_{ij} \ ((i,j) \in C \times C) \ \forall \boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n
\end{aligned}
$$

$$G(N,E) \quad : \quad$$ 無向 graph, $N = \{1,2,\dots,n\}$, $E = N \times N$

$$E^\bullet = E \cup \{(i,i) : i \in N\},$$

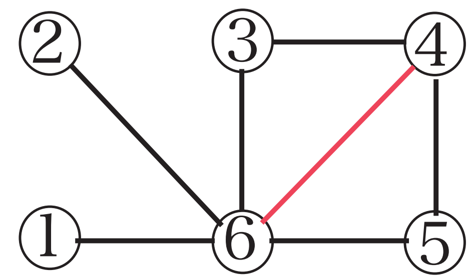
$\mathbb{S}^n(E,?) = E^\bullet$ の要素のみ値をもつ $n \times n$ 不完全対称行列の集合

$\mathbb{S}^n_+(E,?) = \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n(E,?) : \exists \overline{\boldsymbol{X}} \in \mathbb{S}^n_+; \overline{X}_{ij} = X_{ij}$ if $(i,j) \in E^\bullet\}$

$\mathbb{S}^C = \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n : X_{ij} = 0$ if $(i,j) \notin C \times C\} \ \ \forall C \subseteq N$

$\boldsymbol{X}(C) = \widetilde{\boldsymbol{X}} \in \mathbb{S}^C$; $\widetilde{X}_{ij} = X_{ij}\ ((i,j) \in C \times C)\ \forall \boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X_{11} & & & & & X_{16} \\ & X_{22} & & & & X_{26} \\ & & X_{33} & X_{34} & & X_{36} \\ & & X_{43} & X_{44} & X_{45} & X_{46} \\ & & & X_{54} & X_{55} & X_{56} \\ X_{61} & X_{62} & X_{63} & X_{64} & X_{65} & X_{66} \end{pmatrix}$$



(a) G(N,$\overline{\text{E}}$)

chordal graph

- $\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n(\overline{E},?)$ とすると

$$\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n_+(\overline{E},?) \Leftrightarrow \boldsymbol{X}(C) \succeq \boldsymbol{O}\ \forall \text{ 極大 clique } C$$

極大 clique : $\{1,6\}$, $\{2,6\}$, $\{3,4,6\}$, $\{4,5,6\}$

目次

1. 半正定値計画問題
2. 半正定値補完
3. domain-space sparsity
   - Fukuda,Kojima,Murota,Nakata ’01
   - Nakata,Fujisawa,Fukuda,Kojima,Murota ’03
   - Kim,Kojima,Mevissen,Yamashita ’09 — Nonlinear
4. 半正定値補完における双対性と range-space sparsity
5. correlative sparsity
6. 計算実験結果
7. おわりに

対称行列変数 $\boldsymbol{X} \succeq \boldsymbol{O}$ を含む非線形最適化問題

(P) min $f_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X})$ sub.to $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) \in \boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n_+$

ただし， $f_0 : \mathbb{R}^s \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^s \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$.

d-space sparsity pattern graph $G(N, F)$

$$N = \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$F = \{(i, j) : i \neq j,\ X_{ij}\text{の値は } f_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) \text{ or } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) \text{ に必要}\}$$

対称行列変数 $\boldsymbol{X} \succeq \boldsymbol{O}$ を含む非線形最適化問題

(P) min $f_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X})$ sub.to $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) \in \boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n_+$

ただし， $f_0 : \mathbb{R}^s \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^s \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$.

d-space sparsity pattern graph $G(N, F)$

$$N = \{1, 2, \ldots, n\}$$

$F = \{(i, j) : i \neq j,\ X_{ij}$ の値は $f_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X})$ or $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X})$ に必要 $\}$

min $\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{y}) \bullet \boldsymbol{X}$ ただし $\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{y}) : n \times n$ 3 重対角

sub. to (行列不等式, 対角+縁付き)

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} 1 - X_{11} & 0 & \ldots & X_{12} \\ 0 & 1 - X_{22} & \ldots & X_{23} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ X_{21} & X_{32} & \ldots & 1 - X_{nn} \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O},\ \boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n_+$$

対称行列変数 $\boldsymbol{X} \succeq \boldsymbol{O}$ を含む非線形最適化問題

(P) min $f_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X})$ sub.to $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) \in \boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n_+$

ただし， $f_0 : \mathbb{R}^s \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^s \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$.

d-space sparsity pattern graph $G(N, F)$

$$N = \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$F = \{(i, j) : i \neq j,\ X_{ij} \text{の値は } f_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) \text{ or } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) \text{ に必要}\}$$

min $\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{y}) \bullet \boldsymbol{X}$ ただし $\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{y}) : n \times n$ 3 重対角

sub. to (行列不等式, 対角+縁付き)

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} 1 - X_{11} & 0 & \ldots & X_{12} \\ 0 & 1 - X_{22} & \ldots & X_{23} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ X_{21} & X_{32} & \ldots & 1 - X_{nn} \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O},\ \boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n_+$$

- $f_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X})$ or $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X})$ の評価には X_{ij}, $|i - j| \leq 1$ のみ必要
- $F = \{(i, i+1) : i = 1, 2, \ldots, n-1\}$

対称行列変数 $\boldsymbol{X} \succeq \boldsymbol{O}$ を含む非線形最適化問題

(P) min $f_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X})$ sub.to $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) \in \boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n_+$

ただし，$f_0 : \mathbb{R}^s \times \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^s \times \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$.

d-space sparsity pattern graph $G(N, F)$

$$
\begin{aligned}
N &= \{1, 2, \ldots, n\} \\
F &= \{(i,j) : i \neq j,\ X_{ij} \text{の値は } f_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) \text{ or } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) \text{ に必要}\}
\end{aligned}
$$

min $\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{y}) \bullet \boldsymbol{X}$ ただし $\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{y}) : n \times n$ 3 重対角

sub. to (行列不等式, 対角+縁付き)

$$
\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} 1 - X_{11} & 0 & \ldots & X_{12} \\ 0 & 1 - X_{22} & \ldots & X_{23} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ X_{21} & X_{32} & \ldots & 1 - X_{nn} \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O}, \quad \boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n_+
$$

対称行列変数 $\boldsymbol{X} \succeq \boldsymbol{O}$ を含む非線形最適化問題

(P) min $f_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X})$ sub.to $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) \in \boldsymbol{\Omega}, \ \boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n_+$

ただし， $f_0 : \mathbb{R}^s \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^s \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$.

d-space sparsity pattern graph $G(N, F)$

$$N = \{1, 2, \ldots, n\}$$

$F = \{(i, j) : i \neq j, \ X_{ij}$の値は $f_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X})$ or $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X})$ に必要$\}$

min $\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{y}) \bullet \boldsymbol{X}$ ただし $\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{y}) : n \times n$ 3重対角

sub. to (行列不等式, 対角+縁付き)

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} 1 - X_{11} & 0 & \ldots & X_{12} \\ 0 & 1 - X_{22} & \ldots & X_{23} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ X_{21} & X_{32} & \ldots & 1 - X_{nn} \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O}, \ \boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n_+$$

chordal graph

- $\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n_+ \Rightarrow \boldsymbol{X}(\{i, i+1\}) \succeq \boldsymbol{O}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ — 2×2.

対称行列変数 $\boldsymbol{X} \succeq \boldsymbol{O}$ を含む非線形最適化問題

(P) min $f_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X})$ sub.to $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) \in \boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n_+$

ただし, $f_0 : \mathbb{R}^s \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^s \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$.

d-space sparsity pattern graph $G(N, F)$

$$N = \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$F = \{(i, j) : i \neq j,\ X_{ij}\text{の値は } f_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) \text{ or } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) \text{ に必要}\}$$

対称行列変数 $\boldsymbol{X} \succeq \boldsymbol{O}$ を含む非線形最適化問題

(P) min $f_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X})$ sub.to $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) \in \boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n_+$

ただし， $f_0 : \mathbb{R}^s \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^s \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$.

d-space sparsity pattern graph $G(N, F)$

$$N = \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$F = \{(i, j) : i \neq j,\ X_{ij}\text{の値は } f_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) \text{ or } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) \text{ に必要}\}$$

(P) $\Leftrightarrow$ (P') min $f_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X})$ sub.to $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) \in \boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n_+(F, ?)$

$\Downarrow$ $G(N, E)$: $G(N, F)$ の chordal 拡張

(P) $\Leftrightarrow$ (P") min $f_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X})$ sub.to $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) \in \boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n_+(E, ?)$

$\Updownarrow$ $C_1, C_2, \ldots, C_\ell$: $G(N, E)$ の極大 clique

(P"') min $f_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X})$ sub.to $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) \in \boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{X}(C_j) \succeq \boldsymbol{O}$ $(j = 1, \ldots, \ell)$

- $C_i \cap C_j \neq \emptyset \Rightarrow$ "標準形"の半正定値制約ではない
- "標準形"への２つの方法: clique tree を用いる方法 と 基底表現を用いた方法

$$\text{(P) min } f_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) \text{ sub.to } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) \in \boldsymbol{\Omega},\ \boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n_+$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{(P''') min } f_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) \text{ sub.to } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) \in \boldsymbol{\Omega},$$

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_{33} & X_{34} & X_{35} \\ X_{43} & X_{44} & X_{45} \\ X_{53} & X_{54} & X_{55} \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O}$$

(小さな SDP cones と共通変数) $\Longrightarrow$

- SDP cone 間に共通変数を持たない問題への変換 — 2 通り

(P) min $f_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X})$ sub.to $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) \in \boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n_+$

$$\Updownarrow$$

(P''') min $f_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X})$ sub.to $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) \in \boldsymbol{\Omega}$,

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_{33} & X_{34} & X_{35} \\ X_{43} & X_{44} & X_{45} \\ X_{53} & X_{54} & X_{55} \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O}$$

(小さな SDP cones と共通変数) $\Longrightarrow$

- SDP cone 間に共通変数を持たない問題への変換 — 2 通り

1. clique tree を用いる方法 —等式により共通変数を同一視

$$\begin{pmatrix} Y^1_{11} & Y^1_{12} \\ Y^1_{21} & Y^1_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y^2_{11} & Y^2_{12} & Y^2_{13} \\ Y^2_{21} & Y^2_{22} & Y^2_{23} \\ Y^2_{31} & Y^2_{32} & Y^2_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y^3_{11} & Y^3_{12} & Y^3_{13} \\ Y^3_{21} & Y^3_{22} & Y^3_{23} \\ Y^3_{31} & Y^3_{32} & Y^3_{33} \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O},$$

$$Y^1_{22} = Y^2_{11},\ Y^2_{22} = Y^3_{11},\ Y^2_{23} = Y^3_{12},\ Y^2_{33} = Y^3_{22}.$$

- 効率的に，かつ，無駄なく等式を設定するには clique tree を用いる

(P) min $f_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X})$ sub.to $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) \in \boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n_+$

$$\Updownarrow$$

(P''') min $f_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X})$ sub.to $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) \in \boldsymbol{\Omega}$,

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_{33} & X_{34} & X_{35} \\ X_{43} & X_{44} & X_{45} \\ X_{53} & X_{54} & X_{55} \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O}$$

(P) min $f_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X})$ sub.to $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) \in \boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n_+$

$$\Updownarrow$$

(P''') min $f_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X})$ sub.to $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) \in \boldsymbol{\Omega}$,

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_{33} & X_{34} & X_{35} \\ X_{43} & X_{44} & X_{45} \\ X_{53} & X_{54} & X_{55} \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O}$$

2. 基底表現を用いる方法 — $\boldsymbol{X}(C_k)$ を $\mathbb{S}^{C_k}$ の基底 $\boldsymbol{E}_{ij}$ $((i, j \in C_k, i \leq j)$ で $\boldsymbol{X}(C_k) = \sum_{i,j \in C_k, i \leq j} \boldsymbol{E}_{ij} X_{ij}$ と表現；

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X_{11} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X_{12} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X_{22}$$

min $f_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X})$ sub. to $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) \in \boldsymbol{\Omega}$,

$$\sum_{i,j \in C_k, i \leq j} \boldsymbol{E}_{ij} X_{ij} \succeq \boldsymbol{O} \ (k = 1, 2, 3),$$

ただし，　$C_1 = \{1, 2\}$, $C_2 = \{2, 3, 4\}$, $C_3 = \{3, 4, 5\}$.

domain-space conversion のまとめ

$G(N,E)$: graph, $N=\{1,\ldots,n\}$, $E\subseteq N\times N$; $(i,i)\notin E$, $(i,j)=(j,i)\in E,\ E^{\bullet}=E\cup\{(i,i): i\in N\}$.

$\mathbb{S}^n$ ($\mathbb{S}^n_+$) $=$ $n\times n$ (半正定値) 対称行列の集合.

$\mathbb{S}^n(E,?)$ $=$ $n\times n$ 不完全対称行列の集合 ($E^{\bullet}$ のみ値を持つ))

$\mathbb{S}^n_+(E,?)$ $=$ { 半正定値行列に補完可能な $\boldsymbol{X}\in\mathbb{S}^n(E,?)$ の集合 }.

$\boxed{\text{(P) min } f_0(\boldsymbol{y},\boldsymbol{X}) \text{ sub. to } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{X})\in\boldsymbol{\Omega},\ \boldsymbol{X}\in\mathbb{S}^n_+}$

$\Updownarrow$

- X_{ij} $((i,j)\notin E^{\bullet})$ の値は $\boldsymbol{X}\in\mathbb{S}^n_+$ でのみ使用
- G : chordal. C_k $(k=1,\ldots,\ell)$: G の極大 cliques

$\boxed{\text{min } f_0 \text{ sub. to } \boldsymbol{f}\in\boldsymbol{\Omega},\ \boldsymbol{X}(C_k)\succeq\boldsymbol{O}\ (k=1,\ldots,\ell).}$

- $\boldsymbol{X}(C_k)\succeq\boldsymbol{O}$ $(k=1,\ldots,\ell)$ は共通変数を持つ. clique tree を用いる方法 $\Leftarrow$ Fukuda et.al '01, Nakata et.al '03
  基底表現を用いる方法
  $\Leftarrow$ Kim et.al for sensor network localization problems to appear in SIOPT

目次

1. 半正定値計画問題
2. 半正定値補完
3. domain-space sparsity
4. 半正定値補完における双対性と range-space sparsity
   - Kim,Koj,Mevissen,Yamashita Jan.09 — 理論
   - Fujisawa,Kim,Koj,Okamoto,Yamashita Feb.09 — Software for linear SDP
5. correlative sparsity
6. 計算実験結果
7. おわりに

$G(N,E)$: chordal graph, $E^{\bullet} = E \cup \{(i,i) : i \in N\}$.

$C_1, \ldots, C_\ell$: G の極大 cliques. $N = \{1, \ldots, n\}$.

$\mathbb{S}^n(E,0) = \{\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n : Y_{ij} = 0 \ (i,j) \notin E^{\bullet}\}$.

$\mathbb{S}^n_+(E,0) = \{\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n(E,0) : \boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n_+\}$.

$\mathbb{S}^C_+ = \{\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n_+ : Y_{ij} = 0$ if $(i,j) \notin C \times C\}$ for $\forall C \subseteq N$.

$G(N,E)$: chordal graph, $E^\bullet = E \cup \{(i,i) : i \in N\}$.

$C_1, \ldots, C_\ell$: G の極大 cliques. $N = \{1, \ldots, n\}$.

$\mathbb{S}^n(E,0) = \{\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n : Y_{ij} = 0 \ (i,j) \notin E^\bullet\}$.

$\mathbb{S}^n_+(E,0) = \{\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n(E,0) : \boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n_+\}$.

$\mathbb{S}^C_+ = \{\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n_+ : Y_{ij} = 0$ if $(i,j) \notin C \times C\}$ for $\forall C \subseteq N$.

$\mathbb{S}^n(E,?) = E^\bullet$ の要素のみ値が与えられた不完全対称行列

$\mathbb{S}^n_+(E,?) = \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n(E,?)$: psd に補完出来る $\}$

$G(N,E)$: chordal graph, $E^\bullet = E \cup \{(i,i) : i \in N\}$.

$C_1, \ldots, C_\ell$: G の極大 cliques. $N = \{1, \ldots, n\}$.

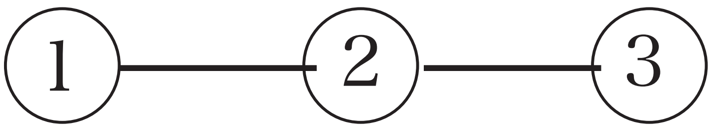
$\mathbb{S}^n(E,0) = \{\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n : Y_{ij} = 0 \ (i,j) \notin E^\bullet\}$.

$\mathbb{S}^n_+(E,0) = \{\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n(E,0) : \boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n_+\}$.

$\mathbb{S}^C_+ = \{\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n_+ : Y_{ij} = 0$ if $(i,j) \notin C \times C\}$ for $\forall C \subseteq N$.

$\mathbb{S}^n(E,?) = E^\bullet$ の要素のみ値が与えられた不完全対称行列

$\mathbb{S}^n_+(E,?) = \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n(E,?)$: psd に補完出来る $\}$

$G(N,E)$ 

$$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^3(E,0), \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & \\ 3 & 3 & 2 \\ & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^3(E,?)$$

- $\boldsymbol{X} \bullet \boldsymbol{Y} \equiv \sum_{(i,j),(j,i) \in E^\bullet} X_{ij} Y_{ij}$ for $\forall\, \boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n(E,0)$, $\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n(E,?)$.
- $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n_+(E,0) \Leftrightarrow \boldsymbol{X} \bullet \boldsymbol{Y} \geq 0$ for $\forall \boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n_+$
  $\Leftrightarrow \boldsymbol{X} \bullet \boldsymbol{Y} \geq 0$ for $\forall \boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n_+(E,?)$ $\quad \Rightarrow$ 双対性.

$G(N, E)$: chordal graph, $E^{\bullet} = E \cup \{(i,i) : i \in N\}$.

$C_1, \ldots, C_\ell$: G の極大 cliques. $N = \{1, \ldots, n\}$.

$\mathbb{S}^n(E, 0) = \{\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n : Y_{ij} = 0 \ (i,j) \notin E^{\bullet}\}$.

$\mathbb{S}^n_+(E, 0) = \{\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n(E, 0) : \boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n_+\}$.

$\mathbb{S}^C_+ = \{\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n_+ : Y_{ij} = 0$ if $(i,j) \notin C \times C\}$ for $\forall C \subseteq N$.

$G(N,E)$: chordal graph, $E^\bullet = E \cup \{(i,i) : i \in N\}$.

$C_1,\ldots,C_\ell$: G の極大 cliques. $N = \{1,\ldots,n\}$.

$\mathbb{S}^n(E,0) = \{\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n : Y_{ij} = 0 \ (i,j) \notin E^\bullet\}$.

$\mathbb{S}^n_+(E,0) = \{\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n(E,0) : \boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n_+\}$.

$\mathbb{S}^C_+ = \{\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n_+ : Y_{ij} = 0$ if $(i,j) \notin C \times C\}$ for $\forall C \subseteq N$.

定理 $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n(E,0)$ とする. $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n_+(E,0)$ iff

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}^1 + \boldsymbol{Y}^2 + \cdots + \boldsymbol{Y}^\ell \text{ for } \exists \boldsymbol{Y}^k \in \mathbb{S}^{C_k}_+ \ (k = 1,\ldots,\ell).$$

$G(N,E)$: chordal graph, $E^\bullet = E \cup \{(i,i) : i \in N\}$.

$C_1, \ldots, C_\ell$: G の極大 cliques. $N = \{1, \ldots, n\}$.

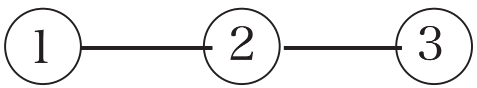
$\mathbb{S}^n(E,0) = \{\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n : Y_{ij} = 0 \ (i,j) \notin E^\bullet\}$.

$\mathbb{S}^n_+(E,0) = \{\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n(E,0) : \boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n_+\}$.

$\mathbb{S}^C_+ = \{\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n_+ : Y_{ij} = 0$ if $(i,j) \notin C \times C\}$ for $\forall C \subseteq N$.

定理 $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n(E,0)$ とする. $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n_+(E,0)$ iff

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}^1 + \boldsymbol{Y}^2 + \cdots + \boldsymbol{Y}^\ell \text{ for } \exists \boldsymbol{Y}^k \in \mathbb{S}^{C_k}_+ \ (k = 1, \ldots, \ell).$$



$C_1 = \{1,2\}$, $C_2 = \{2,3\}$.

$$\underset{\in \mathbb{S}^3_+(E,0)}{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}} = \underset{\in \mathbb{S}^{C_1}_+}{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} + \underset{\in \mathbb{S}^{C_2}_+}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

$G(N, E)$: chordal graph, $E^\bullet = E \cup \{(i,i) : i \in N\}$.

$C_1, \ldots, C_\ell$: G の極大 cliques. $N = \{1, \ldots, n\}$.

$\mathbb{S}^n(E, 0) = \{\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n : Y_{ij} = 0 \ (i,j) \notin E^\bullet\}$.

$\mathbb{S}^n_+(E, 0) = \{\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n(E, 0) : \boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n_+\}$.

$\mathbb{S}^C_+ = \{\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n_+ : Y_{ij} = 0$ if $(i,j) \notin C \times C\}$ for $\forall C \subseteq N$.

定理 $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n(E, 0)$ とする. $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n_+(E, 0)$ iff

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}^1 + \boldsymbol{Y}^2 + \cdots + \boldsymbol{Y}^\ell \text{ for } \exists \boldsymbol{Y}^k \in \mathbb{S}^{C_k}_+ \ (k = 1, \ldots, \ell).$$

$G(N,E)$: chordal graph, $E^\bullet = E \cup \{(i,i) : i \in N\}$.

$C_1, \ldots, C_\ell$: G の極大 cliques. $N = \{1, \ldots, n\}$.

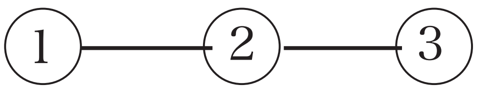
$\mathbb{S}^n(E,0) = \{\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n : Y_{ij} = 0 \ (i,j) \notin E^\bullet\}$.

$\mathbb{S}^n_+(E,0) = \{\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n(E,0) : \boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n_+\}$.

$\mathbb{S}^C_+ = \{\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n_+ : Y_{ij} = 0$ if $(i,j) \notin C \times C\}$ for $\forall C \subseteq N$.

定理 $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n(E,0)$ とする. $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n_+(E,0)$ iff

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}^1 + \boldsymbol{Y}^2 + \cdots + \boldsymbol{Y}^\ell \text{ for } \exists \boldsymbol{Y}^k \in \mathbb{S}^{C_k}_+ \ (k = 1, \ldots, \ell).$$



$C_1 = \{1,2\}$, $C_2 = \{2,3\}$. $\boldsymbol{M} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{S}^3(E,0)$.

$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u}) \in \mathbb{S}^3_+(E,0)$

$G(N,E)$: chordal graph, $E^{\bullet} = E \cup \{(i,i) : i \in N\}$.

$C_1, \ldots, C_\ell$: G の極大 cliques. $N = \{1, \ldots, n\}$.

$\mathbb{S}^n(E,0) = \{\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n : Y_{ij} = 0 \ (i,j) \notin E^{\bullet}\}$.

$\mathbb{S}^n_+(E,0) = \{\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n(E,0) : \boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n_+\}$.

$\mathbb{S}^C_+ = \{\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n_+ : Y_{ij} = 0$ if $(i,j) \notin C \times C\}$ for $\forall C \subseteq N$.

定理 $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n(E,0)$ とする. $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n_+(E,0)$ iff

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}^1 + \boldsymbol{Y}^2 + \cdots + \boldsymbol{Y}^\ell \text{ for } \exists \boldsymbol{Y}^k \in \mathbb{S}^{C_k}_+ \ (k = 1, \ldots, \ell).$$

$1 - 2 - 3$ $\quad C_1 = \{1,2\},\ C_2 = \{2,3\}$. $\boldsymbol{M} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{S}^3(E,0)$.

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u}) \in \mathbb{S}^3_+(E,0) \qquad \boldsymbol{M}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} Y^1_{11} & Y^1_{12} & 0 \\ Y^1_{12} & Y^1_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y^2_{22} & Y^2_{23} \\ 0 & Y^2_{32} & Y^2_{33} \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} M_{11} = Y^1_{11},\ M_{12} = Y^1_{12}, \\ M_{22} = Y^1_{22} + Y^2_{22}, \\ M_{23} = Y^2_{23},\ M_{33} = Y^2_{33}, \\ \square \succeq \boldsymbol{O},\ \square \succeq \boldsymbol{O} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \begin{pmatrix} M_{11}(\boldsymbol{u}) & M_{12}(\boldsymbol{u}) \\ M_{21}(\boldsymbol{u}) & Y^1_{22} \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O}, \\ \begin{pmatrix} M_{22}(\boldsymbol{u}) - Y^1_{22} & M_{23}(\boldsymbol{u}) \\ M_{32}(\boldsymbol{u}) & M_{33}(\boldsymbol{u}) \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O} \end{array}\right.$$

$G(N,E)$: chordal graph, $E^{\bullet} = E \cup \{(i,i) : i \in N\}$.

$C_1, \ldots, C_\ell$: G の極大 cliques. $N = \{1, \ldots, n\}$.

$\mathbb{S}^n(E,0) = \{\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n : Y_{ij} = 0 \ (i,j) \notin E^{\bullet}\}$.

$\mathbb{S}^n_+(E,0) = \{\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n(E,0) : \boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n_+\}$.

$\mathbb{S}^C_+ = \{\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n_+ : Y_{ij} = 0$ if $(i,j) \notin C \times C\}$ for $\forall C \subseteq N$.

定理 $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n(E,0)$ とする. $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{S}^n_+(E,0)$ iff

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}^1 + \boldsymbol{Y}^2 + \cdots + \boldsymbol{Y}^\ell \text{ for } \exists \boldsymbol{Y}^k \in \mathbb{S}^{C_k}_+ \ (k = 1, \ldots, \ell).$$

- 行列分解を用いた r-space conv. method — 前ページ左側
- clique tree を用いた r-space conv. method — 前ページ右側

d-space conversion and r-space conversion のまとめ

- chordal graph で特徴付けられた疎性

$G(N,E)$: chordal graph
C_k $(k=1,2,\ldots,\ell)$: 極大 cliques.

d-space conversion: $\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n_+ \Rightarrow \boldsymbol{X}(C_k) \in \mathbb{S}^{C_k}_+$ $(k=1,2,\ldots,\ell)$.
$\boldsymbol{X}(C_k) \in \mathbb{S}^{C_k}_+$ $(k=1,2,\ldots,\ell)$ を独立な条件にする 2 方法
(d-ct) clique tree を用いた d-dpace conv. method
(d-br) 基底表現を用いた d-space conv. method

r-space conversion: $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u}) \in \mathbb{S}^n_+(E,0) \Leftrightarrow$
$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{Y}^1 + \boldsymbol{Y}^2 + \cdots + \boldsymbol{Y}^\ell$ for $\exists \boldsymbol{Y}^k \in \mathbb{S}^{C_k}_+$ $(k=1,\ldots,\ell)$.
(r-md) 行列分解を用いた r-space conv. method
(r-ct) clique tree を用いた r-space conv. method

- (d-ct) & (r-ct) ((d-br) & (r-md)) は互いに双対な関係.

P: min $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u}) \bullet \boldsymbol{X}$ sub. to $\boldsymbol{X} \succeq \boldsymbol{O}$
D: max 0 sub. to $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u}) \succeq \boldsymbol{O}$

d-space conversion and r-space conversion のまとめ

- chordal graph で特徴付けられた疎性

$G(N, E)$: chordal graph
$C_k \ (k = 1, 2, \ldots, \ell)$: 極大 cliques.

d-space conversion: $\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n_+ \Rightarrow \boldsymbol{X}(C_k) \in \mathbb{S}^{C_k}_+ \ (k = 1, 2, \ldots, \ell)$.
$\boldsymbol{X}(C_k) \in \mathbb{S}^{C_k}_+ \ (k = 1, 2, \ldots, \ell)$ を独立な条件にする 2 方法
(d-ct) clique tree を用いた d-dpace conv. method
(d-br) 基底表現を用いた d-space conv. method

r-space conversion: $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u}) \in \mathbb{S}^n_+(E, 0) \Leftrightarrow$
$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{Y}^1 + \boldsymbol{Y}^2 + \cdots + \boldsymbol{Y}^\ell$ for $\exists \boldsymbol{Y}^k \in \mathbb{S}^{C_k}_+ \ (k = 1, \ldots, \ell)$.
(r-md) 行列分解を用いた r-space conv. method
(r-ct) clique tree を用いた r-space conv. method

d-space conversion and r-space conversion のまとめ

- chordal graph で特徴付けられた疎性

$G(N, E)$: chordal graph
C_k $(k = 1, 2, \ldots, \ell)$: 極大 cliques.

d-space conversion: $\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n_+ \Rightarrow \boldsymbol{X}(C_k) \in \mathbb{S}^{C_k}_+$ $(k = 1, 2, \ldots, \ell)$.
$\boldsymbol{X}(C_k) \in \mathbb{S}^{C_k}_+$ $(k = 1, 2, \ldots, \ell)$ を独立な条件にする 2 方法
(d-ct) clique tree を用いた d-dpace conv. method
(d-br) 基底表現を用いた d-space conv. method

r-space conversion: $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u}) \in \mathbb{S}^n_+(E, 0) \Leftrightarrow$
$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{Y}^1 + \boldsymbol{Y}^2 + \cdots + \boldsymbol{Y}^\ell$ for $\exists \boldsymbol{Y}^k \in \mathbb{S}^{C_k}_+$ $(k = 1, \ldots, \ell)$.
(r-md) 行列分解を用いた r-space conv. method
(r-ct) clique tree を用いた r-space conv. method

- 4 つの方法の効率的な実装，使用 $\Rightarrow$ 今後の研究課題
- 計算実験 — 次節

目次

1. 半正定値計画問題
2. 半正定値補完
3. domain-space sparsity
4. 半正定値補完における双対性と range-space sparsity
5. correlative sparsity
   - Waki,Kim,Kojima,Muramatsu ’06 for POP
   - Kobayashi,Kim,Kojima ’08 for (Polynomial) SDP
6. 計算実験結果
7. おわりに

(線形, 多項式)SDP

min $f_0(\boldsymbol{y})$ sub.to $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \ \boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{y}) \in \mathbb{S}^{m_k}_+ \ (k = 1, \ldots, p)$

$G(N, E)$: correlative sparsity pattern graph; $N = \{1, \ldots, n\}$,

$$E = \left\{ (i,j) : \begin{array}{l} i \neq j, \\ \exists k;\ y_i \text{ と } y_j \text{ の値は } \boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{y}) \text{ の評価に必要} \end{array} \right\}$$

(線形, 多項式)SDP

min $f_0(\boldsymbol{y})$ sub.to $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{y}) \in \mathbb{S}^{m_k}_+ \ (k = 1, \dots, p)$

$G(N, E)$: correlative sparsity pattern graph; $N = \{1, \dots, n\}$,

$$E = \left\{ (i,j) : \begin{array}{l} i \neq j, \\ \exists k;\ y_i \text{ と } y_j \text{ の値は } \boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{y}) \text{ の評価に必要} \end{array} \right\}$$

例. $k = 1$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} 1 - y_1^4 & 0 & 0 & \dots & 0 & y_1 y_2 \\ 0 & 1 - y_2^4 & 0 & \dots & 0 & y_2 y_3 \\ 0 & 0 & \ddots & & 0 & y_3 y_4 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 - y_{n-1}^4 & y_{n-1} y_n \\ y_1 y_2 & y_2 y_3 & y_3 y_4 & \dots & y_{n-1} y_n & 1 - y_n^4 \end{pmatrix}.$$

- $\forall\ y_i \in$ 多項式行列不等式 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}) \succeq \boldsymbol{O} \Rightarrow$ c-sparsity は無い
- range-space sparsity を用いて分解 $\Rightarrow$ c-sparsity, 次ページ

(線形, 多項式)SDP

min $f_0(\boldsymbol{y})$ sub.to $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \ \boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{y}) \in \mathbb{S}^{m_k}_+ \ (k = 1, \ldots, p)$

$G(N, E)$: correlative sparsity pattern graph; $N = \{1, \ldots, n\}$,

$$E = \left\{ (i, j) : \begin{array}{l} i \neq j, \\ \exists k; \ y_i \text{ と } y_j \text{ の値は } \boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{y}) \text{ の評価に必要} \end{array} \right\}$$

(線形, 多項式)SDP

min $f_0(\boldsymbol{y})$ sub.to $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{y}) \in \mathbb{S}^{m_k}_+ \ (k = 1, \ldots, p)$

$G(N, E)$: correlative sparsity pattern graph; $N = \{1, \ldots, n\}$,

$$E = \left\{ (i,j) : \begin{array}{l} i \neq j, \\ \exists k;\ y_i \text{ と } y_j \text{ の値は } \boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{y}) \text{ の評価に必要} \end{array} \right\}$$

例 (続き) range-space sparsity を用いて $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}) \succeq \boldsymbol{O}$ を分解 $\Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 - y_1^4 & y_1 y_2 \\ y_1 y_2 & z_1 \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O}, \quad (z_1, \ldots, z_{n-2} : \text{補助変数}) \\ \begin{pmatrix} 1 - y_i^4 & y_i y_{i+1} \\ y_i y_{i+1} & -z_{i-1} + z_i \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O} \ (2 \leq i \leq n-2), \\ \begin{pmatrix} 1 - y_{n-1}^4 & y_{n-1} y_n \\ y_{n-1} y_n & 1 - y_n^4 - z_{n-2} \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O} \end{array} \right.$$

- $p = n$ 個の 2×2 行列不等式 ($\ni$ 高々 4 つの変数) に分解
- $G(N, E)$ が疎な chordal 拡張を持つとき，sparse SDP 緩和が適用可能. 線形な場合は Schur comp. 行列が疎

(線形, 多項式)SDP

min $f_0(\boldsymbol{y})$ sub.to $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{y}) \in \mathbb{S}_+^{m_k}\ (k = 1, \ldots, p)$

$G(N, E)$: correlative sparsity pattern graph; $N = \{1, \ldots, n\}$,

$$E = \left\{ (i, j) : \begin{array}{l} i \neq j, \\ \exists k;\ y_i \text{ と } y_j \text{ の値は } \boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{y}) \text{ の評価に必要} \end{array} \right\}$$

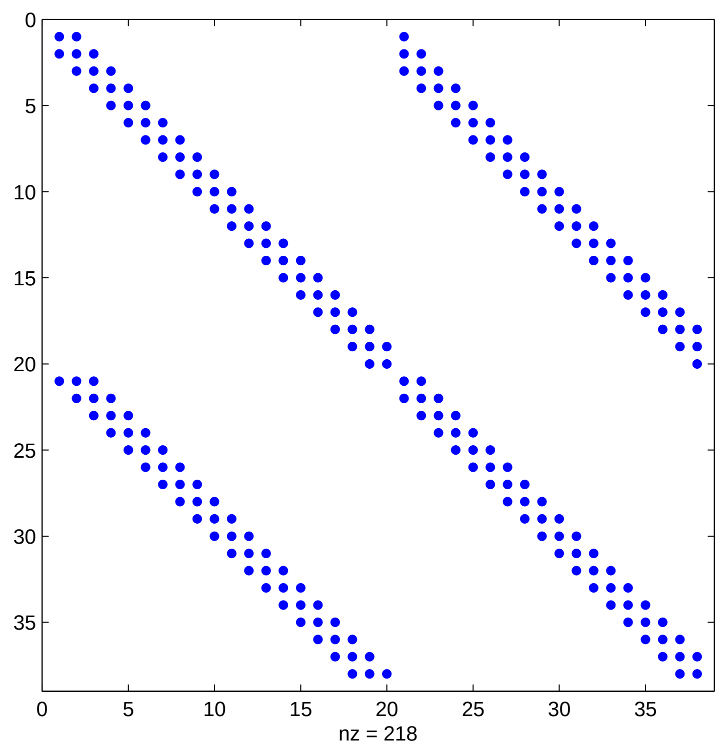
(線形, 多項式)SDP

min $f_0(\boldsymbol{y})$ sub.to $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{y}) \in \mathbb{S}_+^{m_k}\ (k = 1, \ldots, p)$

$G(N, E)$: correlative sparsity pattern graph; $N = \{1, \ldots, n\}$,

$$E = \left\{ (i,j) : \begin{array}{l} i \neq j, \\ \exists k;\ y_i \text{ と } y_j \text{ の値は } \boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{y}) \text{ の評価に必要} \end{array} \right\}$$

例 (続き) c-sparsity pattern $n = 20$



行列不等式

$\boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{y}) \succeq \boldsymbol{O}\ (k = 1, \ldots, p)$

が線形な場合は Schur comp 行列の疎性と一致

目次

1. 半正定値計画問題
2. 半正定値補完
3. domain-space sparsity
4. 半正定値補完における双対性と range-space sparsity
5. correlative sparsity
6. 計算実験結果
7. おわりに

SparsePOP (Waki-Kim-Kojima-Muramtasu ’07)
— 基底表現を用いた d-sparse conversion method と
correlative sparsity の考え方

問題 1　制約条件付多項式 (3 次) 最適化問題

問題 2　無制約多項式 (4 次) 最適化問題

問題 3　無制約多項式 (6 次) 最適化問題

SFSDP (Kim-Kojima-Waki ’08)
— Sensor network localization 問題 (特殊構造の２次最適化問題)
— 基底表現を用いた d-sparse conversion method と
correlative sparsity の考え方

SparseCoLO (Fujisawa-Kim-Kojima-Okamoto-Yamashita ’09)
— 線形 SDP に対する４種類の conversion

- 2.66GHz Intel Core Dual, 12GB memory, Matlab, SeDuMi

問題１：alkyl.gms — globallib からのベンチマーク問題

$$\begin{array}{ll} \min & -6.3x_5x_8 + 5.04x_2 + 0.35x_3 + x_4 + 3.36x_6 \\ \text{sub.to} & -0.820x_2 + x_5 - 0.820x_6 = 0, \\ & 0.98x_4 - x_7(0.01x_5x_{10} + x_4) = 0, \\ & -x_2x_9 + 10x_3 + x_6 = 0, \\ & x_5x_{12} - x_2(1.12 + 0.132x_9 - 0.0067x_9^2) = 0, \\ & x_8x_{13} - 0.01x_9(1.098 - 0.038x_9) - 0.325x_7 = 0.574, \\ & x_{10}x_{14} + 22.2x_{11} = 35.82, \\ & x_1x_{11} - 3x_8 = -1.33, \ \text{lbd}_i \leq x_i \leq \text{ubd}_i \ (i = 1, 2, \ldots, 14). \end{array}$$

Sparse			Dense (Lasserre)		
ϵ_{obj}	ϵ_{feas}	cpu	ϵ_{obj}	ϵ_{feas}	cpu
1.8e-9	9.6e-9	4.1	out of	memory	

$$\epsilon_{\text{obj}} = \frac{|\,\text{最小値の下界} - \text{近似最小解}\,|}{\max\{1, |\,\text{最小値の下界}\,|\}}.$$

ϵ_{feas} = 等式制約の誤差, cpu : 計算時間（秒）

無制約最小化のベンチマーク問題

The gneralized Rosenbrock function — 次数 4 の多項式

$$f_R(\boldsymbol{x}) \;=\; 1 + \sum_{i=2}^{n} \left(100(x_i - x_{i-1}^2) + (1 - x_i^2)\right)$$

The chained singular function — 次数 4 の多項式

$$\begin{aligned} f_C(\boldsymbol{x}) \;=\; & \sum_{i \in J} \Big((x_i + 10x_{i+1})^2 + 5(x_{i+2} - x_{i+3})^2 \\ & + (x_{i+1} - 2x_{i+2})^4 + 10(x_i - 10x_{i+3})^4\Big) \end{aligned}$$

ただし， $J = \{1, 3, 5, \ldots, n-3\}$, n は 4 の倍数.

The Broyden banded function — 次数 6 の多項式

$$f_B(\boldsymbol{x}) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \left(x_i(2 + 5x_i^2) + 1 - \sum_{j \in J_i} (1 + x_j)x_j \right)^2$$

ただし， $J_i = \{j : j \neq i,\ \max\{1, i-5\} \leq j \leq \min\{n, i\}\}$.

問題２：min $f_R(\boldsymbol{x}) + f_C(\boldsymbol{x})$　　問題３：min $f_R(\boldsymbol{x}) + f_B(\boldsymbol{x})$

問題２：min $f_R(\boldsymbol{x}) + f_C(\boldsymbol{x})$ — 4 次, 非常に疎, 未知最適値

	Sparse			Dense (Lasserre)		
n	ϵ_{obj}	$\# =$	cpu	ϵ_{obj}	$\# =$	cpu
12	6e-9	214	0.2	1e-9	1,819	64.1
16	5e-9	294	0.2	1e-9	4,844	1311.1
100	2e-9	1,974	1.2	out of	mem	
1000	7e-11	19,974	16.9			
2000	6e-12	39,974	45.1			
3000	out of	mem				

$$\epsilon_{\text{obj}} = \frac{|\,\text{最小値の下界} - \text{近似最小解}\,|}{\max\{1, |\,\text{最小値の下界}\,|\}}$$

$\# =$: SDP の等式条件数, cpu : 計算時間（秒）

問題 3 : min $f_R(\boldsymbol{x}) + f_B(\boldsymbol{x})$ — 6 次, 疎 as $n \uparrow$, 未知最適値

	Sparse			Dense (Lasserre)		
n	ϵ_{obj}	$\#=$	cpu	ϵ_{obj}	$\#=$	cpu
6	5e-11	923	8.8	5e-11	923	9.5
8	2e-10	2,507	78.3	2e-10	3,002	234.4
10	8e-12	4,091	132.4	out of	mem	
20	5e-11	12,011	414.2			
30	5e-11	19,931	717.8			
40	out of	mem				

$$\epsilon_{\text{obj}} = \frac{|\,\text{最小値の下界} - \text{近似最小解}\,|}{\max\{1, |\,\text{最小値の下界}\,|\}}$$

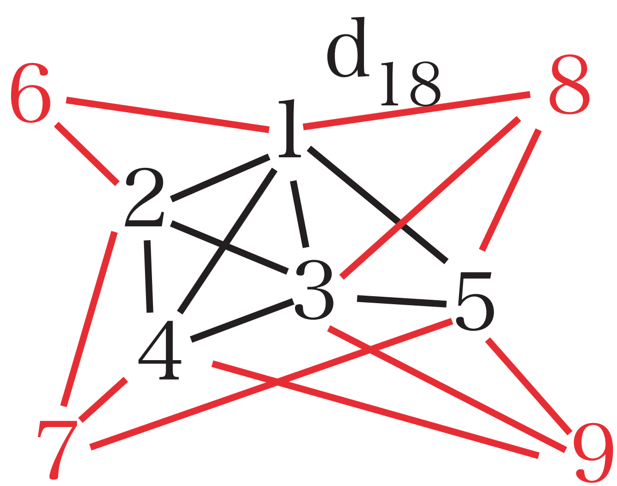
$\# =$: SDP の等式条件数, cpu : 計算時間（秒）

Sensor network localization 問題: $s = 2$ or 3.

$$
\begin{array}{rcl}
\boldsymbol{x}^p \in \mathbb{R}^s & : & \text{sensor の位置, 座標 (未知)}\ (p = 1, 2, \ldots, m), \\
\boldsymbol{x}^r = \boldsymbol{a}^r \in \mathbb{R}^s & : & \text{ancho の位置, 座標 (既知)}\ (r = m+1, \ldots, n), \\
d_{pq}^2 & = & \|\boldsymbol{x}^p - \boldsymbol{x}^q\|^2 + \epsilon_{pq} \ \text{— 距離 (既知) for}\ (p, q) \in \mathcal{N}, \\
\mathcal{N} & = & \{(p, q) : \|\boldsymbol{x}^p - \boldsymbol{x}^q\| \leq \rho = \text{a radio range (既知)}\}
\end{array}
$$

ここで ϵ_{pq} : noise

$m = 5,\ n = 9.$
$1, \ldots, 5$: sensor
$6, 7, 8, 9$: anchor



anchor の位置は既知
∀ edge に対して距離が既知
sensor の位置を計算せよ

⇒ 非凸２次最適化問題 QOP

- SDP 緩和 +? — FSDP by Biswas-Ye '06, ESDP by Wang et al '07, ... for $s = 2$.
- ２次錐計画緩和 — Tseng '07 for $s = 2$.
- ...

3 つの方法の比較実験 : sensor network localization 問題

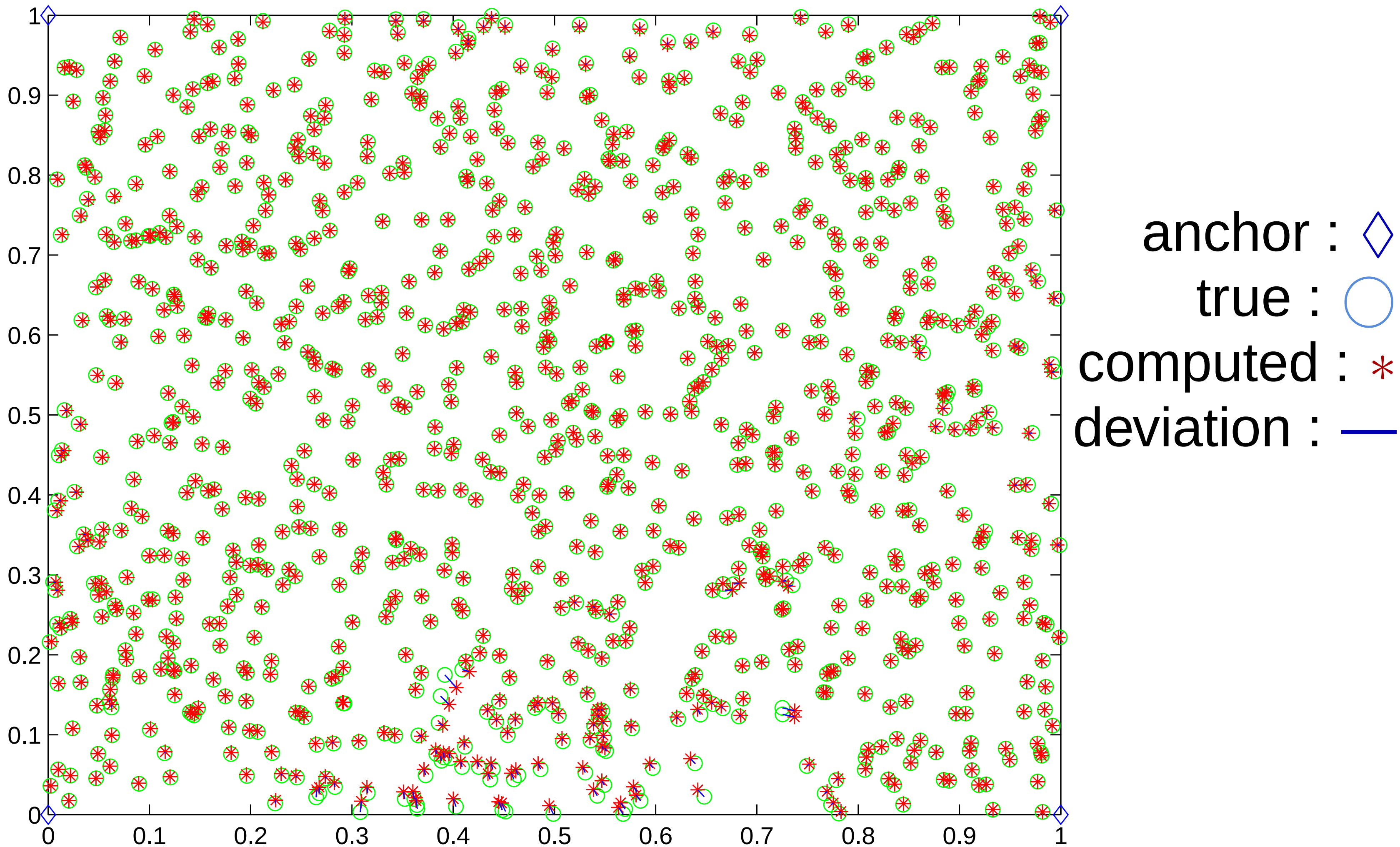
m = sensor の個数, $[0,1]^2$ 上に random に分布
4 つの anchor $[0,1]^2$ の 4 隅に配置
$\rho =$radio range $= 0.1$, noise 無し

FSDP — Biswas-Ye '06, 計算コストは高いが強力
SFSDP = FSDP + 疎性の活用, FSDP と等価
ESDP — FSDP のさらなる緩和, FSDP より弱い

m	SeDuMi cpu time in second		
	FSDP	SFSDP	ESDP
500	389.1	35.0	62.5
1000	3345.2	60.4	200.3
2000		111.1	1403.9
4000		182.1	11559.8

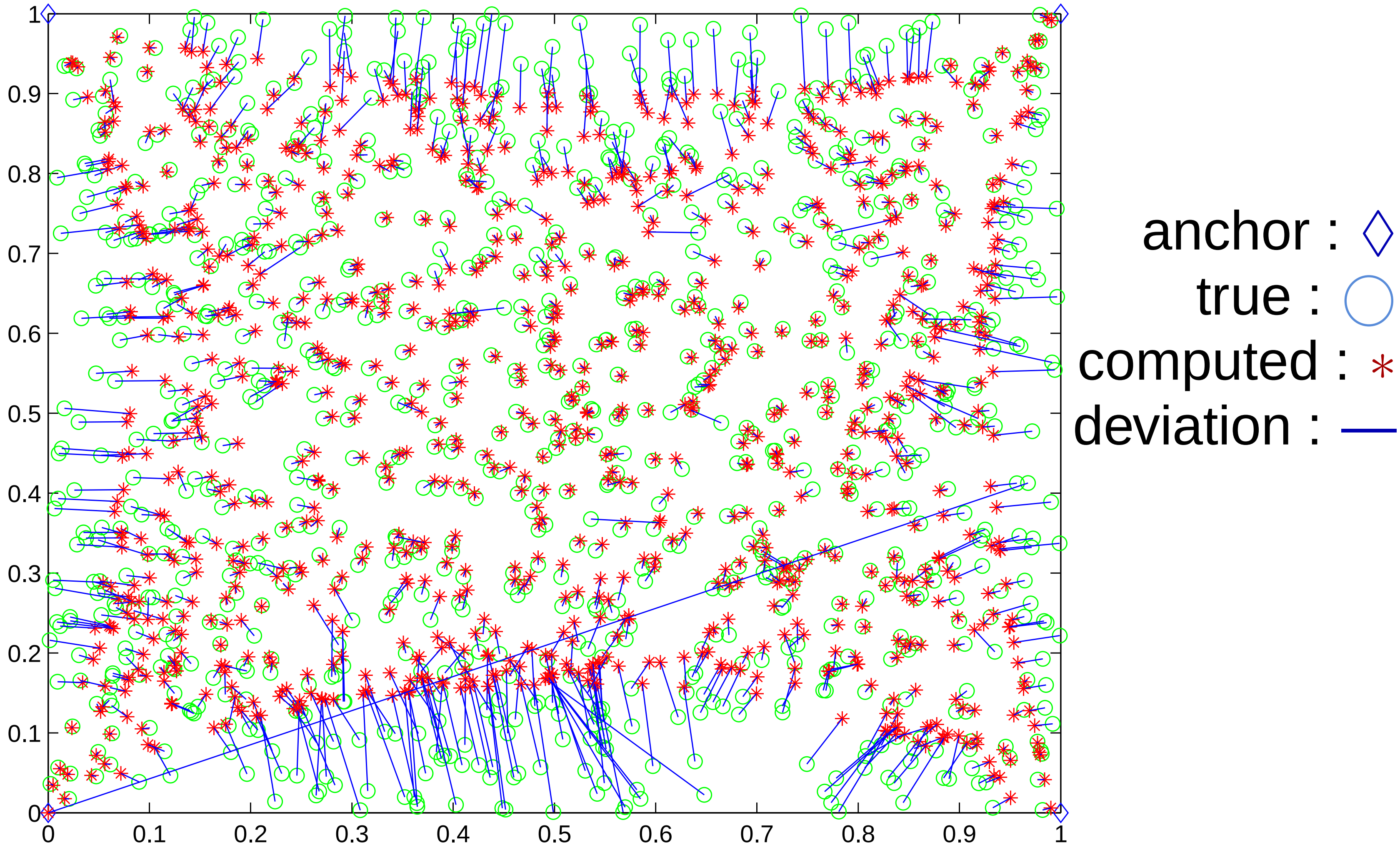
m = 1000 sensors, noise 無し

SFSDP = FSDP + 疎性の活用



m = 1000 sensors, noise 無し

ESDP

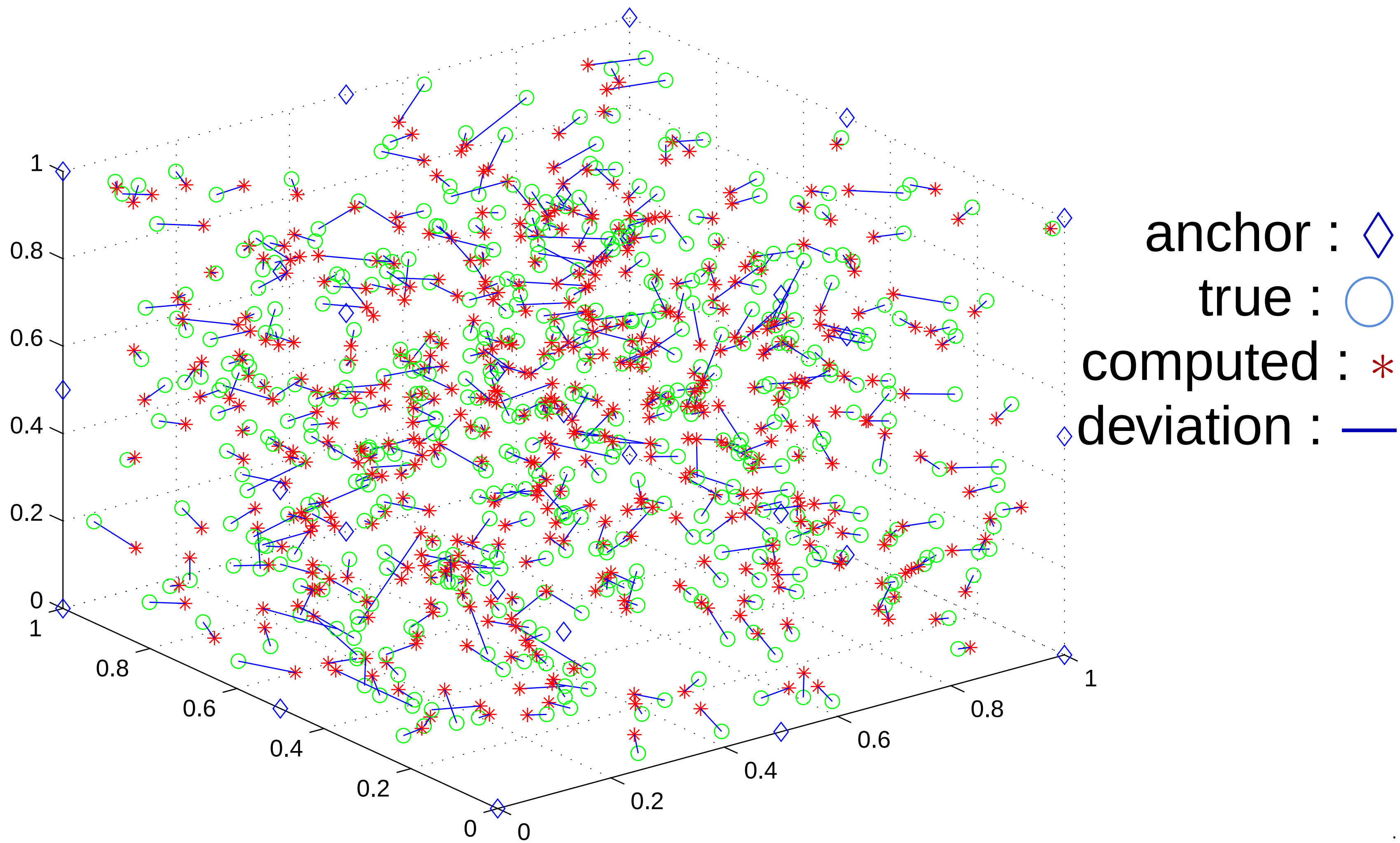


3 dim, 500 sensors, radio range = 0.3, noise $\leftarrow$ N(0,0.1);

$$(\text{誤差を含んだ距離})\hat{d}_{pq} = (1+\epsilon_{pq})d_{pq}(\text{真の距離})$$

$$\epsilon_{pq} \leftarrow N(0, 0.1)$$

SFSDP = FSDP + 疎性の活用

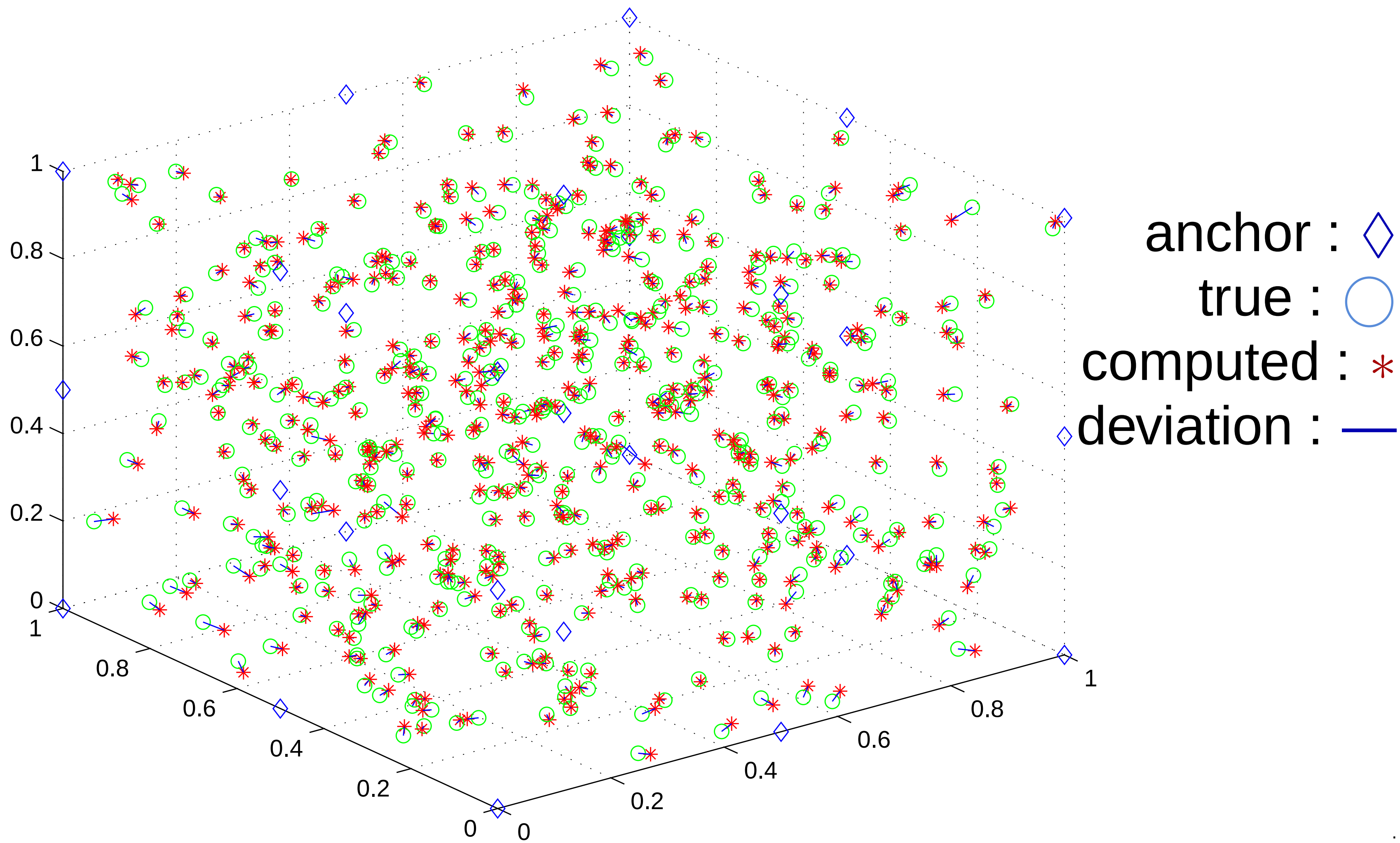


3 dim, 500 sensors, radio range = 0.3, noise $\leftarrow$ N(0,0.1);

$$(\text{誤差を含んだ距離})\hat{d}_{pq} = (1+\epsilon_{pq})d_{pq}(\text{真の距離})$$

$$\epsilon_{pq} \leftarrow N(0, 0.1)$$

SFSDP = FSDP + 疎性の活用 + Gradient 法



Quadratic SDP の Linear SDP 緩和

$$\text{QSDP: min } \sum_{i=1}^{s} c_i x_i \text{ sub. to } \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}) \succeq \boldsymbol{O}$$

$\boldsymbol{M} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{S}^n$, M_{ij} は $x_1, \ldots, x_s$ の高々 2 次の多項式

$$M_{ij}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{Q}_{ij} \bullet \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \end{pmatrix} \text{ for every } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^s.$$

$\Rightarrow$ Linear SDP 緩和

$$\text{SDP: min } \sum_{i=1}^{s} c_i x_i \text{ sub. to } \widehat{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) \succeq \boldsymbol{O}, \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{X} \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O}$$

$$\widehat{M}_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{Q}_{ij} \bullet \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{X} \end{pmatrix} \text{ for every } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^s, \boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^s,$$

- $\boldsymbol{M} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{S}^n$ が凹であるとき，SDP の最適解は，QSDP の最適解
- 一般には，QSDP の最適値 $\geq$ SDP の最適値
  $\Rightarrow$ 以下の実験結果 2， 3 では QSDP は解けていない．

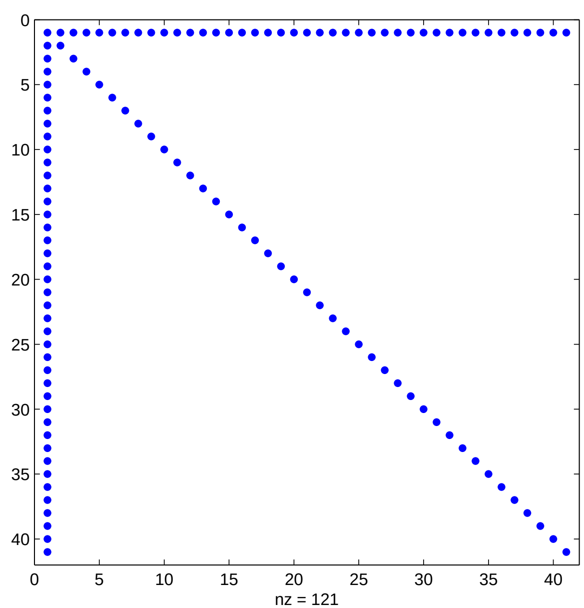
SDP: min $\sum_{i=1}^{s} c_i x_i$ sub. to $\widehat{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) \succeq \boldsymbol{O}$, $\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{X} \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O}$

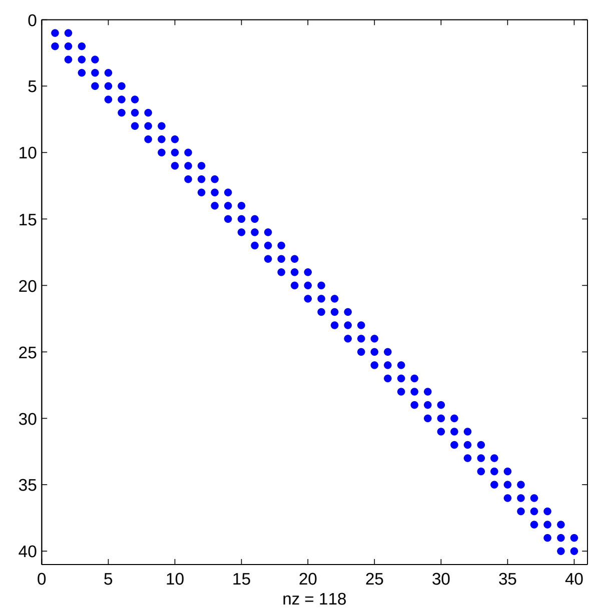
$\widehat{M}_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) \;=\; \boldsymbol{Q}_{ij} \bullet \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{X} \end{pmatrix}$ for every $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^s$, $\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^s$,

$$\text{SDP: min} \sum_{i=1}^{s} c_i x_i \text{ sub. to } \widehat{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) \succeq \boldsymbol{O}, \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{X} \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O}$$

$$\widehat{M}_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{Q}_{ij} \bullet \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{X} \end{pmatrix} \text{ for every } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^s, \boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^s,$$

1． 3 重対角 QSDP — $\widehat{M}(\boldsymbol{X})$ の非ゼロパターンが 3 重対角





d-space sparsity pattern と r–space sparsity pattern

($s = 40$, $n = 40$)

SDP: min $\sum_{i=1}^{s} c_i x_i$ sub. to $\widehat{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) \succeq \boldsymbol{O}$, $\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{X} \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O}$

$\widehat{M}_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{Q}_{ij} \bullet \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{X} \end{pmatrix}$ for every $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^s$, $\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^s$,

1． 3重対角 QSDP — $\widehat{M}(\boldsymbol{X})$ の非ゼロパターンが3重対角

SDP: min $\sum_{i=1}^{s} c_i x_i$ sub. to $\widehat{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) \succeq \boldsymbol{O}$, $\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{X} \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O}$

$\widehat{M}_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) \;=\; \boldsymbol{Q}_{ij} \bullet \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{X} \end{pmatrix}$ for every $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^s, \boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^s$,

1． 3 重対角 QSDP — $\widehat{M}(\boldsymbol{X})$ の非ゼロパターンが 3 重対角

		SeDuMi CPU time in seconds (size of Schur c. mat., max. SDP block size)			
s	n	no sp.	d-br	r-ct	d-br, r-ct
40	40	8.38 (860, 41)	0.97 (80, 40)	8.83 (898, 41)	0.68 (118, 2)
80	80	384.43 (3320, 81)	11.72 (160, 80)	402.86 (3398, 81)	1.58 (238, 2)
320	320	-	100.36 (640, 320)	-	24.57 (958, 2)

SDP: min $\sum_{i=1}^{s} c_i x_i$ sub. to $\widehat{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) \succeq \boldsymbol{O}$, $\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{X} \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O}$

$\widehat{M}_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) \;=\; \boldsymbol{Q}_{ij} \bullet \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{X} \end{pmatrix}$ for every $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^s$, $\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^s$,

1． 3 重対角 QSDP — $\widehat{M}(\boldsymbol{X})$ の非ゼロパターンが 3 重対角

$$\text{SDP: min } \sum_{i=1}^{s} c_i x_i \text{ sub. to } \widehat{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{X}) \succeq \boldsymbol{O},\ \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{X} \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O}$$

$$\widehat{M}_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{Q}_{ij} \bullet \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{X} \end{pmatrix} \text{ for every } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^s, \boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^s,$$

1． 3重対角 QSDP — $\widehat{M}(\boldsymbol{X})$ の非ゼロパターンが3重対角

		SeDuMi CPU time in seconds (size of Schur c. mat., max. SDP block size)			
s	n	no sp	d-br	r-ct	d-br, r-ct
40	80	30.76 (860, 80)	6.27 (80, 80)	28.70 (938, 41)	1.52 (158, 2)
40	160	41.9 (860, 160)	21.86 (80, 160)	32.44 (1081, 41)	2.82 (238, 2)
40	640	474.51 (860, 640)	393.23 (80, 640)	46.26 (1498, 41)	11.60 (718, 2)

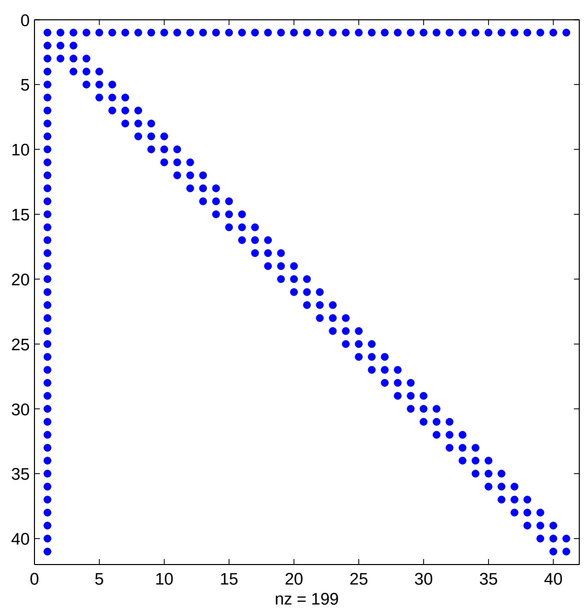
SDP: min $\sum_{i=1}^{s} c_i x_i$ sub. to $\widehat{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) \succeq \boldsymbol{O}$, $\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{X} \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O}$

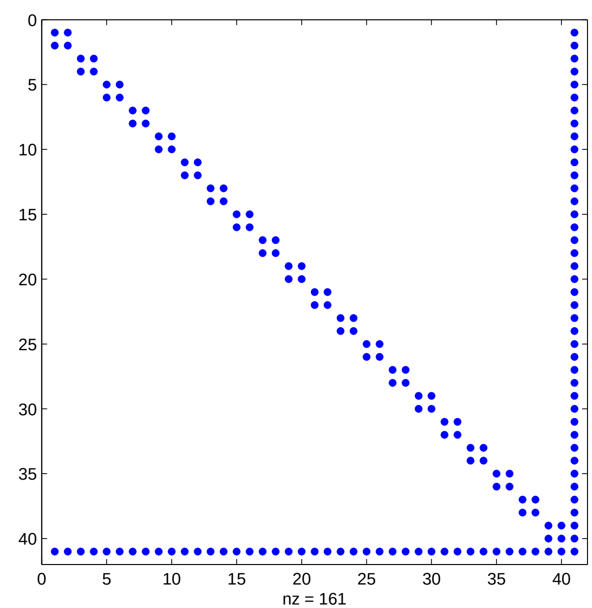
$\widehat{M}_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) \;=\; \boldsymbol{Q}_{ij} \bullet \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{X} \end{pmatrix}$ for every $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^s$, $\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^s$,

$$\text{SDP: min } \sum_{i=1}^{s} c_i x_i \text{ sub. to } \widehat{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) \succeq \boldsymbol{O}, \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{X} \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O}$$

$$\widehat{M}_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{Q}_{ij} \bullet \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{X} \end{pmatrix} \text{ for every } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^s, \boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^s,$$

2．$\widehat{M}(\boldsymbol{X})$ の非ゼロパターンがブロック (2×2) 対角+縁付き





d-space sparsity pattern と r–space sparsity pattern
$(s = 40, n = 41)$

SDP: min $\sum_{i=1}^{s} c_i x_i$ sub. to $\widehat{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) \succeq \boldsymbol{O}$, $\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{X} \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O}$

$\widehat{M}_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) \quad = \quad \boldsymbol{Q}_{ij} \bullet \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{X} \end{pmatrix}$ for every $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^s$, $\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^s$,

2． $\widehat{M}(\boldsymbol{X})$ の非ゼロパターンがブロック (2×2) 対角+縁付き

SDP: min $\sum_{i=1}^{s} c_i x_i$ sub. to $\widehat{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) \succeq \boldsymbol{O}$, $\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{X} \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O}$

$$\widehat{M}_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{Q}_{ij} \bullet \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{X} \end{pmatrix} \text{ for every } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^s, \boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^s,$$

2．$\widehat{M}(\boldsymbol{X})$ の非ゼロパターンがブロック (2×2) 対角+縁付き

		SeDuMi CPU time in seconds (size of Schur c. mat., max. SDP block size)			
s	n	no sp	d-br	r-ct	d-br, r-ct
40	41	13.89 (860, 41)	1.85 (119, 41)	13.59 (879, 41)	1.14 (138, 3)
80	81	532.73 (3320, 81)	19.26 (239, 81)	529.99 (3359, 81)	2.98 (278, 3)
320	321	-	253.49 (959, 321)	-	76.15 (1118, 3)

$$\text{SDP: min } \sum_{i=1}^{s} c_i x_i \text{ sub. to } \widehat{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) \succeq \boldsymbol{O}, \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{X} \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O}$$

$$\widehat{M}_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{Q}_{ij} \bullet \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{X} \end{pmatrix} \text{ for every } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^s, \boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^s,$$

2. $\widehat{M}(\boldsymbol{X})$ の非ゼロパターンがブロック (2×2) 対角+縁付き

$$\text{SDP: min } \sum_{i=1}^{s} c_i x_i \text{ sub. to } \widehat{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) \succeq \boldsymbol{O}, \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{X} \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O}$$

$$\widehat{M}_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{Q}_{ij} \bullet \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{X} \end{pmatrix} \text{ for every } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^s, \boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^s,$$

2．$\widehat{M}(\boldsymbol{X})$ の非ゼロパターンがブロック (2×2) 対角+縁付き

		SeDuMi CPU time in seconds (size of Schur c. mat., max. SDP block size)			
s	n	no sp	d-br	r-ct	d-br, r-ct
40	81	30.41 (860, 81)	12.26 (119, 81)	12.28 (899, 41)	0.94 (158,3)
40	161	38.71 (860, 161)	27.63 (119, 161)	9.22 (939, 41)	1.45 (198, 3)
40	641	591.10 (860, 641)	551.37 (119, 641)	24.10 (1179, 41)	8.13 (438, 3)

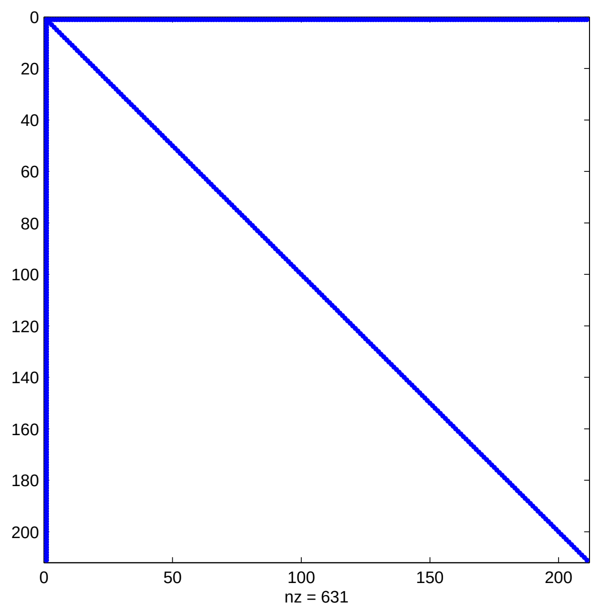
SDP: min $\sum_{i=1}^{s} c_i x_i$ sub. to $\widehat{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) \succeq \boldsymbol{O}$, $\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{X} \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O}$

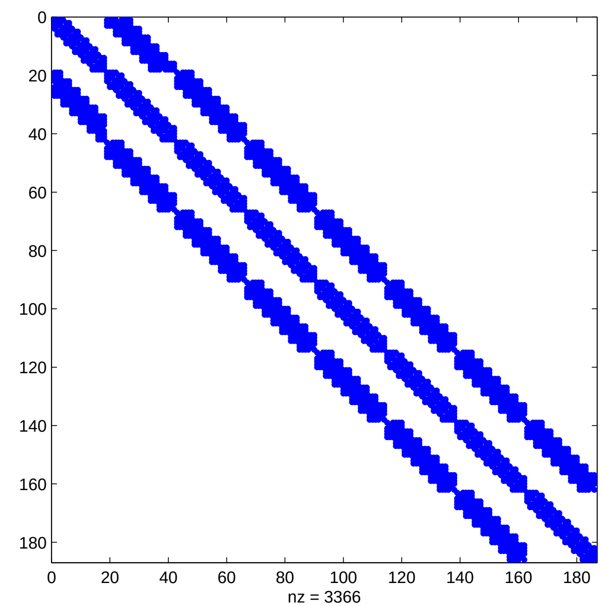
$\widehat{M}_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) \;=\; \boldsymbol{Q}_{ij} \bullet \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{X} \end{pmatrix}$ for every $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^s$, $\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^s$,

SDP: min $\sum_{i=1}^{s} c_i x_i$ sub. to $\widehat{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) \succeq \boldsymbol{O}$, $\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{X} \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O}$

$\widehat{M}_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) \;=\; \boldsymbol{Q}_{ij} \bullet \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{X} \end{pmatrix}$ for every $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^s$, $\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^s$,

3. Eigenvalue Optim. of Structures (Kanno,Ohsaki '07)





d-space sparsity pattern と r–space sparsity pattern
$(s = 210, n = 186)$

SDP: min $\sum_{i=1}^{s} c_i x_i$ sub. to $\widehat{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) \succeq \boldsymbol{O}$, $\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{X} \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O}$

$\widehat{M}_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) \;=\; \boldsymbol{Q}_{ij} \bullet \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{X} \end{pmatrix}$ for every $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^s, \boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^s$,

3. Eigenvalue Optim. of Structures (Kanno,Ohsaki '07)

$$\text{SDP: min } \sum_{i=1}^{s} c_i x_i \text{ sub. to } \widehat{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) \succeq \boldsymbol{O}, \ \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{X} \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O}$$

$$\widehat{M}_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{Q}_{ij} \bullet \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{X} \end{pmatrix} \text{ for every } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^s, \boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^s,$$

3. Eigenvalue Optim. of Structures (Kanno,Ohsaki '07)

		SeDuMi CPU time in seconds (size of Schur c. mat., max. SDP block size)			
s	n	no sp(p)	d-ct(p)	r-md(p)	d-ct, r-md
42	42	12.2 (946, 43)	10.5 (948, 42)	3.2 (540, 43)	2.0 (542,21)
72	69	296.7 (2488, 73)	303.8 (2493, 69)	19.6 (1152, 73)	8.7 (1157, 30)
210	186	-	- -	600.7 (4691, 211)	525.9 (4704, 45)

(p) — 主問題 (等式標準形) へ変換. (d) — 双対問題へ変換

SDP: min $\sum_{i=1}^{s} c_i x_i$ sub. to $\widehat{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) \succeq \boldsymbol{O}$, $\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{X} \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O}$

$$\widehat{M}_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{Q}_{ij} \bullet \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{X} \end{pmatrix} \text{ for every } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^s, \boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^s,$$

3. Eigenvalue Optim. of Structures (Kanno,Ohsaki '07)

		SeDuMi CPU time in seconds (size of Schur c. mat., max. SDP block size)			
s	n	d-bs(d)	d-ct (d)	r-md(p)	d-ct, r-md
42	42	0.7 (85, 42)	0.9 (364, 42)	3.2 (540, 43)	2.0 (542,21)
72	69	3.1 (145, 69)	4.2 (670, 69)	19.6 (1152, 73)	8.7 (1157, 30)
210	186	41.3 (421,186)	38.3 (1955,186)	600.7 (4691, 211)	525.9 (4704, 45)

(p) — 主問題 (等式標準形) へ変換. (d) — 双対問題へ変換

目次

1. 半正定値計画問題
2. 半正定値補完
3. domain-space sparsity
4. 半正定値補完における双対性と range-space sparsity
5. correlative sparsity
6. 計算実験結果
7. おわりに

Exploiting sparsity characterized by a chordal graph structure in polynomial SDPs via psd matrix completion

Polynomial SDP

each large matrix variable

↓ exploiting **domain-sparsity**

multiple smaller matrix variables

each large matrix inequality

↓ exploiting **range-sparsity**

multiple smaller matrix inequalities

↓ sparse SDP relaxation

Linear SDP with multiple smaller matrix variables and multiple smaller matrix inequalities satisfying **correlative sparsity**

‖

`sparsity of the Schur complement matrix`

- Overheads in domain- and range-space conv. methods; adding equalities, real variables and/or matrix variables
- More efficient implementation? How do we combine them?