

数理計画法概論

2007年10月 小島政和

- 数理計画問題は「与えられた制約条件の下でより良い目的を達成するための数理モデル」.
- 現実の問題を数理計画問題に定式化し、それを解くアルゴリズム (数値計算手法) までを含めて

数理計画法 (Mathematical Programming)

と呼ぶ. この講義では簡単な例をあげながら, 数理計画法の基本的な概念を説明し, 時間があれば最近の発展にもふれる.

e-mail: kojima@is.titech.ac.jp

小島政和ホームページ: <http://www.is.titech.ac.jp/~kojima/>

この資料は <http://www.is.titech.ac.jp/~kojima/wabun.html> で得られる.

- 1 数理計画法概論
 - 1.1 数理計画問題とは?
 - 1.2 数理計画問題の難しさ
 - 1.3 数理計画問題の分類
- 2 最適化の例
 - 2.1 生産計画
 - 2.2 鉄工業における板取計画
 - 2.3 施設配置, 輸送
 - 2.4 タンクローリーの配車計画
 - 2.5 人員配置
 - 2.6 情報通信ネットワーク
 - 2.7 金融関係
 - 2.8 ネットワーク上の最適化の例
- 3 線形計画問題
 - 3.1 線形計画問題の特徴
 - 3.2 線形計画問題の難しさ
 - 3.3 “単体法” 対 “内点法”
 - 3.4 計算実験結果
- 4 レポート課題

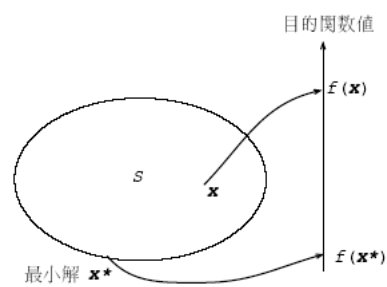
1 数理計画法概論

- 1.1 数理計画問題とは？
- 1.2 数理計画問題の難しさ
- 1.3 数理計画問題の分類

数理計画問題

P 目的： $f(x) \rightarrow$ 最小化 条件： $x \in S$.

ただし、
 R^n : n 次元 Euclid 空間
 $S \subset R^n$: 許容領域, 実行可能領域, 制約集合
 $f : R^n \rightarrow R$, 目的関数



数理計画問題

P 目的: $f(x) \rightarrow$ 最小化 条件: $x \in S$.

ただし, R^n : n 次元 Euclid 空間
 $S \subset R^n$: 許容領域, 実行可能領域, 制約集合
 $f: R^n \rightarrow R$, 目的関数

1.2 数理計画問題の難しさ

一般に, 数理計画問題を扱うには以下の点に注意:

- (a) 解は存在するか.
- (b) 解 (あるいは近似解) は計算できるか?
- (c) 解 (あるいは近似解) を効率よく計算するにはどのような手法を用いればよいか?

有限の時間では有限個の点でしか目的関数の値を評価することしか出来ない.

万能手法はない

数理計画問題

P 目的: $f(x) \rightarrow$ 最小化 条件: $x \in S$.

ただし, R^n : n 次元 Euclid 空間
 $S \subset R^n$: 許容領域, 実行可能領域, 制約集合
 $f: R^n \rightarrow R$, 目的関数

1.3 数理計画問題の分類

通常, 許容領域 S は以下の形で与えられる.

$$S = \left\{ x \in R^n : \begin{array}{l} g_j(x) \leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, p), \\ h_k(x) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, q), \quad x \in U \end{array} \right\}$$

条件 $x \in U$ は等式や不等式では表しにくい整数条件や組合せ的な条件を表すために使われる.

g_j , h_k や集合 U および目的関数 f の性質で分類;

線形計画, 凸2次計画, 凸計画, 非凸2次計画, 非線形計画,

整数計画問題, 組合せ最適化問題, 離散最適化問題

2 最適化の例

- 2.1 生産計画
- 2.2 鉄工業における板取計画
- 2.3 施設配置, 輸送
- 2.4 タンクローリーの配車計画
- 2.5 人員配置
- 2.6 情報通信ネットワーク
- 2.7 金融関係
- 2.8 ネットワーク上の最適化の例

企業の経済活動のさまざまな局面

- 生産計画
- 施設配置, 輸送
- 人員配置
- 仕事のスケジューリング
- 投資, 金融商品の開発
- ...

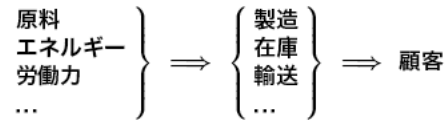
工学分野

- 建造物の構造最適化
- LSI の設計
- ...

大学

- 時間割り, 教室割り当て
- F ゼミの割り当て, 学科所属
- ...

2.1 生産計画



単一品種の大量生産 $\Rightarrow$ 顧客の要求の多様化, 多様な生産

— ある自動車会社の例 —

- 多くの車種 (エンジン, ボディ等)
- 多くのオプション (パワーウィンドウ, エアバッグ)

↓

非常に多くの部品の管理 $\Rightarrow$ コスト

部品には他の部品と代替できるものがあるので, 高い部品を付け捨てしても部品数を減らして管理コストをさげる. 付け捨てした部品は顧客からは見えないようにする.

↓

部品間の代替, 選択, 生産量に関する最適化問題

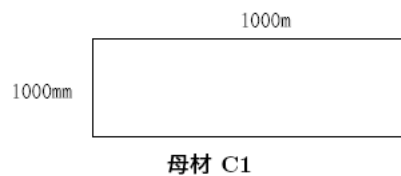
2.2 鉄鋼業における板取り計画

母材のリスト

コイル	コイル幅	コイル長	規格
C1	1000mm	1000m	AAA
C2	1000mm	2000m	AAA
C3	1000mm	1500m	BBB
C4	1000mm	1000m	CCC
⋮	⋮	⋮	⋮

顧客の注文リスト

注文	コイル幅	コイル長	規格	納期
A1	250mm	800m	XXX	12/20
A2	300mm	2000m	XXX	01/10
A3	500mm	500m	XXX	12/22
A4	200mm	1400m	XXX	12/25
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮



2.2 鉄鋼業における板取り計画

母材のリスト

コイル	コイル幅	コイル長	規格
C1	1000mm	1000m	AAA
C2	1000mm	2000m	AAA
C3	1000mm	1500m	BBB
C4	1000mm	1000m	CCC
⋮	⋮	⋮	⋮

顧客の注文リスト

注文	コイル幅	コイル長	規格	納期
A1	250mm	800m	XXX	12/20
A2	300mm	2000m	XXX	01/10
A3	500mm	500m	XXX	12/22
A4	200mm	1400m	XXX	12/25
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

目的

- 複数の注文を組み合わせて切り捨てる量を最小化
- 刃の取り換え作業回数を少なく
-

条件

- 母材の制約
- 納期の制約
-

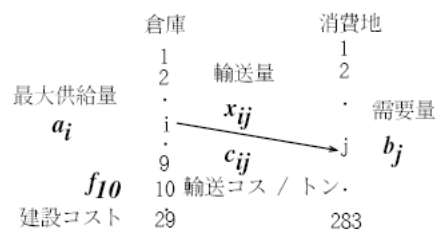
2.3. 施設配置，輸送

全国 9 箇所に倉庫，283 の消費地に商品を輸送，需要増加で 20 の候補地の数力所に倉庫を建設したい，需要を満たし，かつ，輸送に関わるコストを最小にしたい。

- a_i : 倉庫 i の最大供給量 (トン/日) ($i = 1, 2, \dots, 29$)
- b_j : 消費地 j での需要量 (トン/日) ($j = 1, 2, \dots, 283$)
- c_{ij} : 倉庫 i から消費地 j への輸送コスト (千円/トン)
- f_i : 倉庫 i の建設コスト + 維持費 (千円/日)

制御できる変量

- $S \subset \{10, \dots, 29\}$: 建設候補
- x_{ij} : 倉庫 $i \rightarrow$ 消費地 j への輸送量 (トン/日)



2.3. 施設配置, 輸送

全国 9 箇所に倉庫, 283 の消費地に商品を輸送. 需要増加で 20 の候補地の数力所に倉庫を建設したい. 需要を満たし, かつ, 輸送に関わるコストを最小にしたい.

- a_i : 倉庫 i の最大供給量 (トン/日) ($i = 1, 2, \dots, 29$)
- b_j : 消費地 j での需要量 (トン/日) ($j = 1, 2, \dots, 283$)
- c_{ij} : 倉庫 i から消費地 j への輸送コスト (千円/トン)
- f_i : 倉庫 i の建設コスト + 維持費 (千円/日)

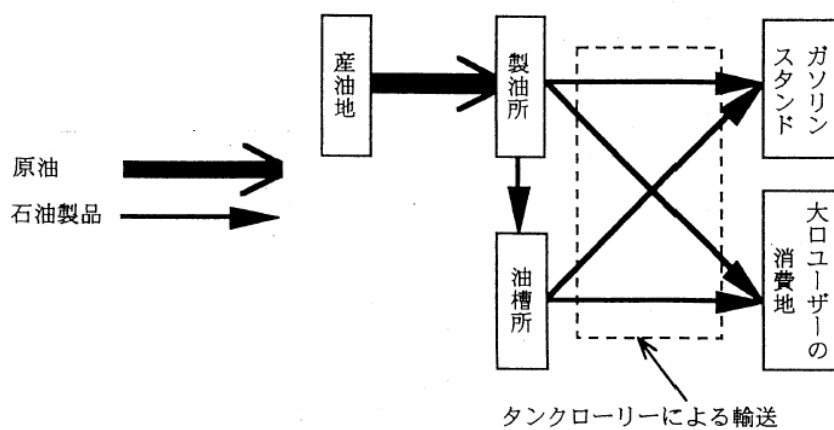
制御できる変量

- $S \subset \{10, \dots, 29\}$: 建設候補
- x_{ij} : 倉庫 $i \rightarrow$ 消費地 j への輸送量 (トン/日)

$$\text{目的: } \sum_{i \in \{1, \dots, 9\} \cup S} \sum_{j=1}^{283} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in S} f_i \rightarrow \text{最小化}$$

$$\begin{aligned} \text{条件: } & \sum_{j=1}^{283} x_{ij} \leq a_i \quad (i \in \{1, \dots, 9\} \cup S) \\ & \sum_{i \in \{1, \dots, 9\} \cup S} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \dots, 283) \\ & x_{ij} \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 283, i \in \{1, \dots, 9\} \cup S) \end{aligned}$$

2.4 タンクローリーの配車計画



- タンクは複数のハッチに分割されており, ハッチごとに異なる油種を積載可能
- 各車両は1日単位で運行
- 時間に関する制約が厳しい

目的: 輸送にかかるコスト (タンクローリーの台数) の最小化

2.4 タンクローリーの配車計画

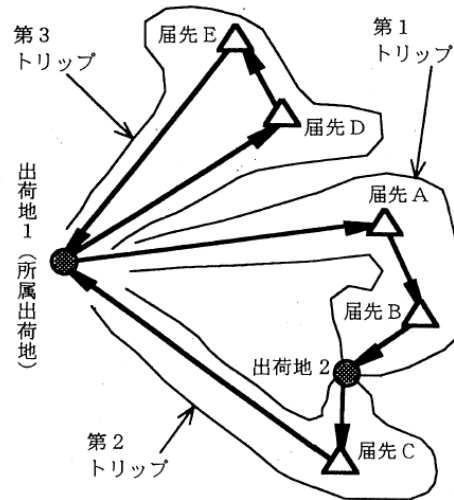


図2 1台のタンクローリーの1日の運行例

- タンクは複数のハッチに分割されており、ハッチごとに異なる油種を積載可能
- 各車両は1日単位で運行
- 時間に関する制約が厳しい

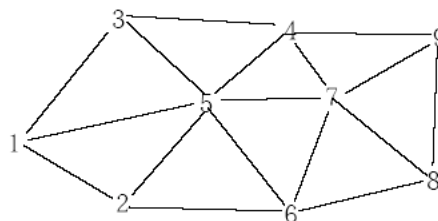
目的：輸送にかかるコスト(タンクローリーの台数)の最小化

2.5 人員配置

- 航空会社の乗務員
考慮すべき要因 — 空港、飛行機、乗務員、フライトスケジュール等
- コンビニ、飲食店等でのアルバイト学生

2.6 情報通信ネットワーク

- 通信路の動的な決定
- ネットワークの設計
-

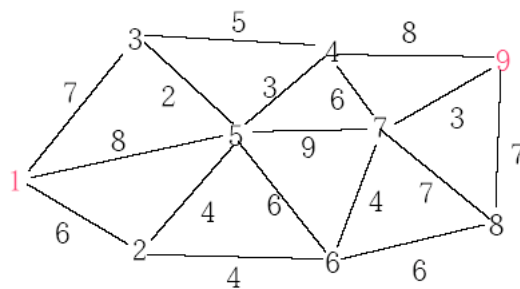


2.7 金融関係

- 投資
- 資金の調達
- 金融商品の評価, 新商品の開発
-

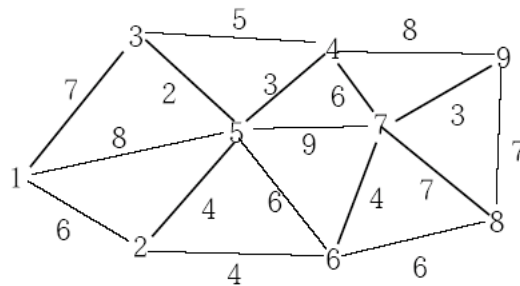
2.8 ネットワーク上の最適化問題の例

最短路問題：都市1から都市9への最短路を計算せよ.



2.8 ネットワーク上の最適化問題の例

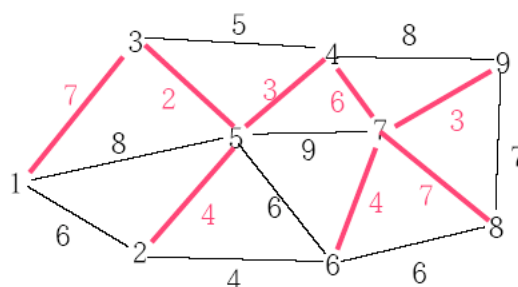
巡回セールスマン問題：9都市すべてを最短時間で回りたい。



2.8 ネットワーク上の最適化問題の例

最小木問題：9都市すべてを結ぶバス路線網を設計したい。ただし、バスの運転手（複数）の総運転時間を最小にしたい。

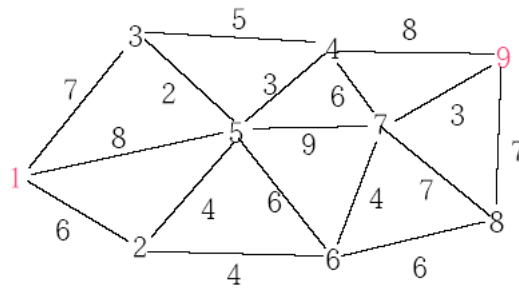
例えば



総合運転時間 = $7+2+4+3+6+4+7+3$

2.8 ネットワーク上の最適化問題の例

最大流問題：9都市の石油パイプライン網が与えられたとき、都市1から都市9へ流せる最大の石油量を計算せよ。

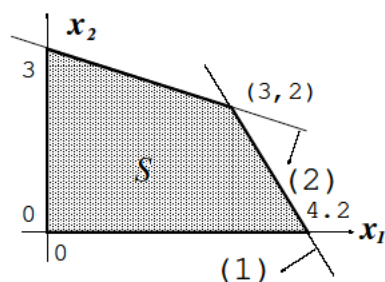


3 線形計画問題

- 3.1 線形計画問題の特徴
- 3.2 線形計画問題の難しさ
- 3.3 “単体法” 対 “内点法”
- 3.4 計算実験結果

線形計画問題 (Linear Programming, LP と略)

目的 : $4x_1 + 7x_2 \rightarrow$ 最大化
 条件 : $5x_1 + 3x_2 \leq 21$ -- (1)
 $x_1 + 3x_2 \leq 9$ -- (2)
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.



- (a) 許容領域 S は直線で囲まれた多角形 $\Rightarrow$ 有限個の頂点
 (b) 最大は頂点で達成.

(LP の一般形) 目的 : $c_1x_1 + \dots + c_nx_n \rightarrow$ 最大化 or 最小化
 条件 : $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq (\geq \text{ or } =) b_i$.

(等式標準形) 目的 : $c^T x = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow$ 最小化
 条件 : $Ax = b, x \geq 0$.

(不等式標準形, 基準形) 目的 : $c^T x = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow$ 最小化
 条件 : $Ax \geq b, x \geq 0$.

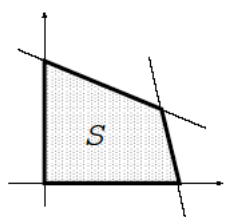
許容領域 (実行可能領域) :

$$S = \{x \geq 0 : Ax = b\} \text{ or } \{x \geq 0 : Ax \geq b\}$$

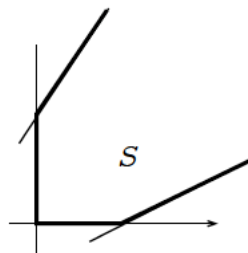
LP の特徴

- (a) 許容領域 S は有限個の超平面で囲まれた多面集合で, 有限個の頂点.
 (1) $S = \emptyset$.
 (2) S は有界 $\rightarrow \exists$ 最小解.
 (3) S は非有界. $\rightarrow$ 目的関数値が非有界 または $\exists$ 最小解.
 (b) 最小点は頂点で達成.

(1) S は有界



(2) S は非有界



シンプレックス法



1. 頂点を1つ見つける → 初期頂点
2. 初期頂点から隣の頂点をたどって最小点に達する
代数的にはピボット演算 (基本変形)

3.2. LP の難しさ

(不等式標準形, 基準形) 目的 : $c^T x = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow$ 最小化
条件 : $Ax \geq b, x \geq 0$.

ただし, $c \in R^n$, $A : m \times n$ 行列, $b \in R^m$

LP の特徴

- (a) 許容領域 S は有限個の超平面で囲まれた多面集合で, 有限個の頂点.
- (b) 最小点は頂点で達成.

変数の個数 n と制約の個数 m の増加にともなって頂点の個数が爆発的に増加.

頂点の個数 $>> n$ や m の多項式

$$| \\ nC_m$$

$$| \\ n^4 + m^2 n^3$$

LP は本当に線形か？

線形方程式は線形

$Ax = b, A : n \times n$ 行列

線形不等式は線形か？

$Ax \geq b, A : m \times n$ 行列

消去法を用いて $O(n^3)$ 加減乗除で解ける.

消去法を用いて m, n の多項式回数の加減乗除で解けるか？

線形不等式系, LP は非線形な方法 "橢円体法", "内点法" を用いると m, n の多項式回数の加減乗除で解ける.

3.3 “単体法” 対 “内点法” — 基本的な考え方の違い



線形計画問題の特徴
“最適解が存在すれば頂点のなかに最適解”
“頂点の個数は有限個”

単体法：隣り合う頂点を辿りながら目的関数値を改善して、最適な頂点に到達。

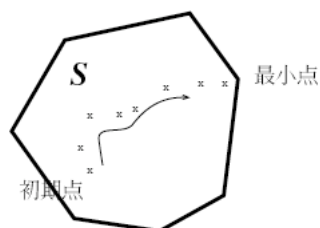
しかしながら、頂点の個数は変数 n の個数や制約条件の個数 m の増加にともなって爆発的（組合せ的に）に増加— n や m の多項式ではおさえられない。

S の境界 — 組合せ的な複雑さ $\Rightarrow$ 計算の複雑度からみた単体法の難しさ

“ S の境界 — 組合せ的な複雑さ” を避けるには S の内部を通ればよい

↓ 内点法

内点法の基本的な考え方 — なるべく境界から離れながら、最適解に近づく



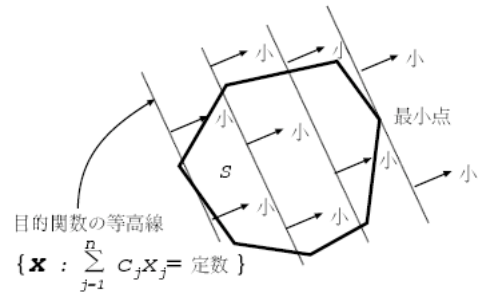
これを実現するために “性質の良い非線形性” を利用

射影変換, 対数罰金関数, ポテンシャル関数, 中心パス,

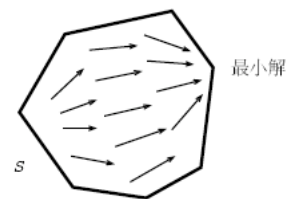
↓

許容領域内部に “非線形な方向ベクトル場 (最急降下方向)”

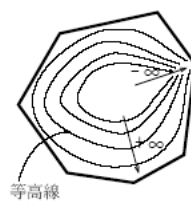
目的関数から導かれる方向ベクトル場(最急降下方向)



内点法で使われる非線形な方向ベクトル場(最急降下方向)



ポテンシャル関数



3.4 計算実験結果

E.D. Andersen, J. Gondio, C. Meszaros and X. Xu

“Implementation of interior-point methods for large scale linear programs,” in *Interior Point Methods of Mathematical Programming*, Kluwer, 1996.

問題	n : 変数	m : 等式・不等式	非ゼロ
pilot8	2,030	4,883	73,804
df001	6,071	12,230	41,873
mod2	35,664	31,782	220,116
world	35,510	32,734	220,748
NL	7,195	9,718	102,570

問題	Cplex シンプレックス法		Cplex 内点法	
	反復	秒	反復	秒
pilot8	10,167	722	41	603
df001	63,389	3,767	47	3,829
mod2	117,360	18,200	57	947
world	134,270	22,470	62	1,146
NL	32,273	1,125	31	147

3.4 計算実験結果

E.D. Andersen, J. Gondio, C. Meszaros and X. Xu

“Implementation of interior-point methods for large scale linear programs,” in *Interior Point Methods of Mathematical Programming*, Kluwer, 1996.

問題	n : 変数	m : 等式・不等式	非ゼロ
pilot8	2,030	4,883	73,804
df001	6,071	12,230	41,873
mod2	35,664	31,782	220,116
world	35,510	32,734	220,748
NL	7,195	9,718	102,570

H. Mittelmann (mittelmann@asu.edu)

Hardware: Linux-PC, 3.2 GHz P4, 4 GB RDRAM, Linux-2.6, Nov. 2006

問題	n : 変数	m : 等式, 不等式	非ゼロ
cont1	40,398	160,793	399,991
cont2	641,598	1,918,399	5,752,001
cont11	981,396	1,468,599	4,403,001
rail4284	1,092,610	4,284	12,372,358
spal004	321,696	10,203	46,167,908

計算時間 (秒)

	内点法		シンプレックス法	
	CPLEX	XPRESS-MP	CPLEX	XPRESS-MP
cont1	952	2,389	2,174	2,229
cont2	3,171	2,820		
cont11	> 50,000			
rail4284	239	411	5,235	8,928
spal004	4,669	> 200,000		

H. Mittelmann (mittelmann@asu.edu)

Hardware: Linux-PC, 3.2 GHz P4, 4 GB RDRAM, Linux-2.6, Nov. 2006

問題	n : 変数	m : 等式, 不等式	非ゼロ
cont1	40,398	160,793	399,991
cont2	641,598	1,918,399	5,752,001
cont11	981,396	1,468,599	4,403,001
rail4284	1,092,610	4,284	12,372,358
spal004	321,696	10,203	46,167,908

4 レポート課題

身近にある問題を最適化問題としてとらえ、それを数学的なモデルとして定式化することを試み、そのモデルの妥当性、解法等について考察せよ。

評価の基準およびヒント：

- モデル化を工夫し、そのモデルと現実の差をきちんと考察せよ。
- 1つの問題に対して、複数のモデル化をし、その優劣を比較するとよい。
- そのモデルを解くことがどの程度難しいかを考察せよ。

e-mail: kojima@is.titech.ac.jp

小島政和ホームページ: <http://www.is.titech.ac.jp/~kojima/>

この資料は <http://www.is.titech.ac.jp/~kojima/wabun.html> で得られる。