

2010 年度前学期数学演習 3 類 (P クラス) 第 1 回演習問題

- (1-1) この問題は、解答用紙に解答すること
 A, B を 2 次正方行列とする。

i. $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ を満たす A, B の条件を求めよ。

ii. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ のとき i. を満たす B を一般的な形で求めよ。

(1-2)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & -3 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

について、以下の計算をせよ。

$$Ab, B^3, aA, {}^tAB, ba, {}^taa, b^tb$$

- (1-3) 次の行列 A, B について、行列積 AB をブロック単位で求めよ。

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 3 & 5 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ \hline 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), B = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

- (1-4) 教科書より 1.8 を抜粋

A, B を対称行列とすると、次の 2 条件は同値であることを示せ。

i. AB は対称行列である。

ii. $AB = BA$

- (1-5) 実数 α について、行列 $A = \begin{pmatrix} \alpha/\sqrt{2} & \alpha/\sqrt{2} \\ \alpha/\sqrt{2} & -\alpha/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ が与えられている。

i. A^n を求めよ。

ii. $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ が存在する α の条件を求め、 $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ を求めよ。

- (1-6) n 次正方行列 A, B, C と n 次零行列 O について、行列 $\begin{pmatrix} A & O \\ B & C \end{pmatrix}$ の逆行列が n 次正方行列 X, Y, Z

を用いて $\begin{pmatrix} X & O \\ Y & Z \end{pmatrix}$ の形で表現できたとする。

i. X, Y, Z を求めよ。

ii. この逆行列が存在するための、 A, B, C の条件を求めよ。

略解

- (1-1) i. $(A - B)^2 = A^2 - AB + BA + B^2$ より、 A, B が満たすべき条件は、 $AB = BA$ 。
 ii. $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とすると、 $AB = BA$ の両辺は $\begin{pmatrix} 3x+z & 3y+w \\ 2z & 2w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x & x+2y \\ 3z & z+2w \end{pmatrix}$ となる。両辺の成分が等しくなるようにするには、実数 x, y に対して $B = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x-y \end{pmatrix}$ の形となる。

(1-2)

$$\begin{aligned} Ab &= \begin{pmatrix} -4 \\ -15 \\ 7 \end{pmatrix}, B^3 = \begin{pmatrix} 75 & -40 & 116 \\ 136 & 25 & -7 \\ 76 & -58 & -11 \end{pmatrix}, aA = \begin{pmatrix} -19 & 39 \end{pmatrix}, \\ {}^tAB &= \begin{pmatrix} 31 & 22 & 4 \\ 18 & -15 & 30 \end{pmatrix}, ba = \begin{pmatrix} -6 & 10 & -4 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}, {}^taa = \begin{pmatrix} 9 & -15 & 6 \\ -15 & 25 & -10 \\ 6 & -10 & 4 \end{pmatrix}, \\ b^tb &= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(1-3) 次の行列 A, B について、 AB をブロック単位で求めよ。

$$AB = \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & -2 & -4 & 6 \\ 12 & 5 & 2 & -3 \\ \hline 0 & 0 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{array} \right),$$

(1-4) A, B が対称行列であるから、 ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA = BA$ が成り立つ。また、 AB が対称行列であることは ${}^t(AB) = AB$ である。これらを用いる。

(1-5) i. n が奇数のとき、 $A^n = \alpha^n \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ であり、 n が偶数のとき、 $A^n = \alpha^n I$ 。

ii. $-1 < \alpha < 1$ で奇数、偶数ともに収束し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = O$ である。

(1-6) i. $X = A^{-1}, Y = -C^{-1}BA^{-1}, Z = C^{-1}$ 。

ii. A, C に逆行列が存在すること。