

2010 年度前学期数学演習 3 類 (P クラス) 第 2 回演習問題

(2-1),(2-4) は $\epsilon - \delta$ 論法を用いて厳密に示すこと。(2-2),(2-3),(2-5) は $\epsilon - \delta$ 論法までは用いなくてもよいが、どのように計算するか計算過程を示すこと。

Hint: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ の $\epsilon - \delta$ 論法による定義は、 $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N, \quad |a_n - \alpha| < \epsilon$ である。つまり、任意の $\epsilon > 0$ をひとつ固定したときに、ある自然数 N が存在し、 N 以上の任意の自然数 n で、 $|a_n - \alpha| < \epsilon$ となることである。

(2-1) この問題は、解答用紙に解答すること

i. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$ の定義を書け。

ii. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ の定義を書け。(Hint: ∞ は任意の実数 M よりも大きい。)

iii. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ となるとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$ となることを示せ。

(2-2) 数列 a_n が次のように示されているとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。ただし、 $a, b, c > 0$ であり、 a, b, c は互いに異なる。

$$(1) \quad n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right), \quad (2) \quad 4^n + n(-3)^n, \quad (3) \quad \frac{\sin(n\pi)}{n}$$

$$(4) \quad \frac{a^n}{n!}, \quad (5) \quad \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}}, \quad (6) \quad \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$$

(2-3) 次の級数を求めよ。

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}, \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)},$$

(2-4) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ のとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = \alpha$$

を示せ。

(2-5) A を正の定数として、 $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{a_n + A}$ で数列 a_n を定義する。 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ は、 $\alpha^2 = \alpha + A$ の解のうち正の値に収束するが、その値に収束することを示せ。(Hint: $a_{n+1} \geq a_n \geq 1$, また a_n の一般形は求めなくても良い。)

略解

$$(2-1) \quad \text{i. } \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N, \quad \left| \frac{1}{a_n} \right| < \epsilon$$

$$\text{ii. } \forall M > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N, \quad a_n > M$$

iii. $\forall \epsilon > 0$ について、 $M = \frac{1}{\epsilon}$ と置くと $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N, \quad a_n > M$ である。したがって、 $n \geq N$ では、 $0 < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{M} = \epsilon$ となり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ が示される。

(2-2)

$$(1) \quad \frac{1}{2} \left[\text{注: } n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \right], \quad (2) \quad \infty, \quad (3) \quad 0$$

$$(4) \quad 0 \quad (5) \quad 1(a > 1), 0(a = 1), -1(a < 1), \quad (6) \quad \max\{a, b, c\}$$

(2-3)

$$(1) \quad \frac{3}{4} \quad \left[\text{注: } S_m = \sum_{n=1}^m \frac{n}{3^n} \text{ とすると } S_m - \frac{1}{3} S_m = \sum_{n=1}^m \frac{1}{3^n} - \frac{m+1}{3^{m+1}} \right]$$

$$(2) \quad \frac{1}{4} \quad \left[\text{注: } \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \right]$$

(2-4) $\forall \epsilon > 0$ をひとつ固定する。このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ より $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ で $\forall n \geq N_1, |a_k - \alpha| < \frac{\epsilon}{2}$ とできる。次に、 $M = \sum_{k=1}^{N_1} |a_k - \alpha|$ と置く。ここで、 N を $N > \max\{\frac{2M}{\epsilon}, N_1\}$ を満たす整数とする。このとき、 $\forall n \geq N$ で

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k - \alpha \right| &= \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n (a_k - \alpha) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_1} |a_k - \alpha| + \frac{1}{n} \sum_{k=N_1+1}^n |a_k - \alpha| \\ &\leq \frac{M}{n} + \frac{n - N_1}{n} \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

(2-5) 収束先 α は、 $\alpha^2 = \alpha + A$ を満たす正の数である。つまり、 $\alpha = \frac{1 + \sqrt{1+4A}}{2}$ である。ここで、

$$a_{n+1} - \alpha = \sqrt{a_n + A} - \alpha = \sqrt{a_n + \alpha^2 - \alpha} - \alpha = \frac{a_n - \alpha}{\sqrt{(a_n - \alpha) + \alpha^2 + \alpha}}$$

より、

$$|a_{n+1} - \alpha| = \frac{|a_n - \alpha|}{\sqrt{(a_n - \alpha) + \alpha^2 + \alpha}} \leq \frac{1}{\alpha} |a_n - \alpha|$$

となる。 $\alpha > 1$ より、

$$|a_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{n-1} |a_1 - \alpha|$$

が得られる。これを使うと、 $\forall \epsilon > 0$ に対して、 $N > 1 - \frac{\log \epsilon}{\log \alpha} \frac{1}{\log |a_1 - \alpha|}$ と取ること、 $\forall n \geq N$ で、 $|a_n - \alpha| < \epsilon$ とできる。