

2010 年度前学期数学演習 3 類 (P クラス) 第 3 回演習問題

今回は、計算問題が中心である。階数の計算は面倒であるため通常コンピュータに行わせるが、今回は計算力をつけるためにも、手計算で行うこと。

(3-1) この問題の (iii) までは、解答用紙に解答すること

行基本変形により、階段行列と階数を求めよ。ただし、 a, b は実数である。

$$\begin{aligned}
 & \text{(i)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{(ii)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 6 & -3 & -9 \end{pmatrix}, \quad \text{(iii)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \\
 & \text{(iv)} \begin{pmatrix} 6 & -8 & 4 & 8 \\ -3 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{(v)} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{(vi)} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \\
 & \text{(vii)} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & -3 & 6 \\ -1 & 2 & -5 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & -14 & -13 & 18 \\ -5 & 10 & -17 & 0 & -6 \end{pmatrix}, \quad \text{(viii)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -6 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 6 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

(3-2) 正方行列 A について $AX = XA = I$ を満たす X は必ず A の逆行列である。 $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ の逆行列が $\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$ であることを確認せよ。

(3-3) 教科書 P24 の定理 2.1 を証明せよ。つまり、以下の 3 つである。

$$\text{(i)} P_i(c)^{-1} = P_i\left(\frac{1}{c}\right), \quad \text{(ii)} P_{ij}(c)^{-1} = P_{ij}(-c), \quad \text{(iii)} P_{ij}^{-1} = P_{ij}$$

なお、行に関する基本行列は、以下の 3 種類である。

- $P_i(c)$: 単位行列の第 i 行を c 倍した行列 ($c \neq 0$)
- $P_{ij}(c)$: 単位行列の第 i 行に第 j 行の c 倍を加えた行列
- P_{ij} : 単位行列の第 i 行と第 j 行を入れ替えた行列

Hint: 証明方法は複数ある。また、任意の行列 A に対して $XA = A$ となる行列 X は単位行列 I だけであることに注意するという方法もある。

略解

(3-1) 階段行列は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
 & \text{(i)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7/3 \\ 0 & 1 & -5/3 \end{pmatrix}, \quad \text{(ii)} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(iii)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 & \text{(iv)} \begin{pmatrix} 1 & -4/3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 \end{pmatrix}, \quad \text{(v)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 & \text{(vii)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -17/8 & 15/4 \\ 0 & 0 & 1 & -5/8 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(viii)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

なお、(vi) は変則的であり、

$$\left\{ \begin{array}{ll} a \neq 0, b \neq 0, a^2 - b^2 \neq 0 & \text{なら} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ a \neq 0, b \neq 0, a^2 - b^2 = 0 & \text{なら} \begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ a = 0, b \neq 0 \text{ または } a \neq 0, b = 0 & \text{なら} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ a = 0, b = 0 & \text{なら} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

(3-2) 積を計算すると簡単に確認できる。

(3-3) (ii) だけを示すことにする。任意の行列 $\mathbf{A}$ に対して

$$\begin{aligned}
 P_{ij}(-c) \times P_{ij}(c) \times \mathbf{A} &= P_{ij}(-c) \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} + ca_{j1} & a_{i2} + ca_{j2} & \cdots & a_{in} + ca_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} + ca_{j1} - ca_{j1} & a_{i2} + ca_{j2} - ca_{j2} & \cdots & a_{in} + ca_{jn} - ca_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \mathbf{A}
 \end{aligned}$$

よって $P_{ij}(-c) \times P_{ij}(c) = \mathbf{I}$ であり、このことから (ii) が示される。