

2010 年度前学期数学演習 3 類 (P クラス) 第 6 回演習問題

(6-1) この問題の (iii) までを解答用紙に解答すること

次の関数を微分せよ。

(今回は、 x の範囲による場合分けはしなくてもよいことにする。たとえば、 $\tan(2x)$ は $x = \pi/4$ で微分できないが、そのことにふれなくても良い。)

$$\begin{aligned}
 & \text{(i)} \tan(2x) \quad \text{(ii)} \sqrt{\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}} \\
 & \text{(iii)} \tan^{-1}(x) \quad \text{(iv)} \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2}\right) \quad (\text{ただし } a > b > 0) \\
 & \text{(v)} x^x \quad \text{(vi)} (\cos x)^{\sin x} (\text{ただし } 0 < x < \frac{\pi}{2}) \\
 & \text{(vii)} \frac{\sqrt{4+x^2} + \sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4+x^2} - \sqrt{4-x^2}} \quad \text{(viii)} \log(x + \sqrt{x^2 + a^2})
 \end{aligned}$$

(6-2) 次の関係式から $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ。(Hint: 教科書 P62 の例 1)

$$\text{(i)} x = t^2, y = t^4 \quad \text{(ii)} x = r \cos t, y = r \sin t \quad \text{ただし } r > 0 \text{ は定数}$$

(6-3) $f(x) = \log(1+x)$ とする。このとき、自然数 n における $f^{(n)}(0)$ をもとめよ。(Hint: 教科書 P63 の例 3, また $(1+x)f^{(n+1)}(x) + nf^{(n)}(x) = 0$ を帰納法で示すこと。)

(6-4) $f(x) = x^2$ がある実数 $x_0 \in \mathbb{R}$ で連続であることの定義は

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |x^2 - x_0^2| < \epsilon$$

である。また、 $f(x) = x^2$ が区間 $[0, 1]$ で一様連続であることの定義は

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x_0 \in [0, 1], \text{ s.t. } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |x^2 - x_0^2| < \epsilon$$

である。 $(\delta$ は「連続」であれば x_0 にあわせて調整できるが、「一様連続」では x_0 に依存せずに決定できなければならない。)

このとき、以下の問題に答えよ。(Hint: 教科書 PP 38,39)

(i) $f(x) = x^2$ がある実数 $x_0 \in \mathbb{R}$ で連続であることを示せ。

(ii) $f(x) = x^2$ が区間 $[0, 1]$ で一様連続であることを示せ。

(iii) $f(x) = x^2$ が実数空間全体では一様連続でないことを示せ。

略解

$$(6-1) \quad (i) \quad \frac{2}{\cos^2(2x)}$$

$$(ii) \quad \frac{1-x^2}{\sqrt{1+x^2+x^4}(1-x+x^2)}$$

$$(iii) \quad \frac{1}{1+x^2}$$

$$(iv) \quad \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2(a+b \cos x)}$$

$$(v) \quad x^x(\log x + 1)$$

$$(vi) \quad (\cos x)^{\sin x} \left(\cos x \log \cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x} \right)$$

$$(vii) \quad -\frac{8}{x^3} \left(1 + \frac{4}{\sqrt{16-x^4}} \right)$$

$$(viii) \quad \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$(6-2) \quad (i) \quad \frac{dy}{dx} = 2t^2, \frac{d^2y}{dx^2} = 2$$

$$(ii) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\cos t}{\sin t}, \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{r \sin^3 t}$$

$$(6-3) \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

$$(6-4) \quad (i) \quad \forall \epsilon > 0 \text{ に対して、} \delta > 0 \text{ を } \delta(\delta + 2|x_0|) < \epsilon \text{ を満たすものとする。 (このような } \delta > 0 \text{ は } x_0 \text{ を固定すれば必ず存在する。)} \text{ このとき、} |x - x_0| < \delta \text{ であれば、}$$

$$|x + x_0| = |x - x_0 + 2x_0| \leq |x - x_0| + 2|x_0| < \delta + 2|x_0|$$

である。したがって、

$$|x^2 - x_0^2| = |x - x_0||x + x_0| < \delta(\delta + 2|x_0|) < \epsilon$$

となる。

$$(ii) \quad x_0 \in [0, 1] \text{ より、} \delta(\delta + 2|x_0|) \leq \delta(\delta + 2) \text{ であり、} \delta = -1 + \sqrt{1 + \epsilon/2} \text{ とすると、} \delta(\delta + 2) = \epsilon/2 < \epsilon \text{ とできる。このとき、} \delta \text{ は } \epsilon \text{ のみによって決まり } x_0 \text{ に依存していない。この } \delta \text{ について } |x - x_0| < \delta \text{ であれば、} |x^2 - x_0^2| = |x - x_0||x + x_0| < \delta(\delta + 2|x_0|) \leq \delta(\delta + 2) < \epsilon \text{ となる。}$$

$$(iii) \quad \text{まず、} \epsilon > 0, \delta > 0 \text{ を固定する。ここで } x_0 \in \mathbb{R} \text{ に対して } x = x_0 + \delta/2 \text{ とすると、} |x - x_0| < \delta \text{ は満たされる。このとき、任意の } x_0 \in \mathbb{R} \text{ で } |x^2 - x_0^2| = \delta(x_0 + \delta/4) < \epsilon \text{ が成り立つためには、} 0 < \delta < -2x_0 + \sqrt{4x_0^2 + 4\epsilon} \text{ が任意の } x_0 \in \mathbb{R} \text{ で成り立たなければならない。しかし、}$$

$$\lim_{x_0 \rightarrow \infty} -2x_0 + \sqrt{4x_0^2 + 4\epsilon} = \lim_{x_0 \rightarrow \infty} \frac{4\epsilon}{2x_0 + \sqrt{4x_0^2 + 4\epsilon}} = 0$$

であるため、 $0 < \delta < -2x_0 + \sqrt{4x_0^2 + 4\epsilon}$ を成り立たせなくする $x_0 \in \mathbb{R}$ が存在する。実際、 $x_0 > \epsilon/\delta - \delta/4$ で成り立たない。