

2010 年度前学期数学演習 3 類 (P クラス) 微分積分期末テスト

- 教科書類の参照禁止
- 答案用紙の回収枚数が確認されるまで退出禁止
- 解答時間は 70 分間
- 結果だけでなく計算過程も示すこと
- (test-1),(test-2) は答案用紙の 1 枚目, (test-3),(test-4) は答案用紙の 2 枚目, (test-5) は答案用紙の 3 枚目, (test-6) は答案用紙の 4 枚目に解答すること (合計 4 枚である)
- 各枚ごとに裏面を使用するときは、裏面に続くことを明示すること

(test-1) i. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$ の定義を $\epsilon - \delta$ 論法 ($\epsilon - N$ 論法とも呼ぶ) により書け。

ii. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ の定義を書け。

iii. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ となるとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$ となることを示せ。

(test-2) 次の関数を微分せよ。また、結果はできるだけ整理された形にすること。ただし、 a, b は $a > b > 0$ となる定数である。なお、 x の値による場合分けはしなくてもよい。

$$(i) \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2} \right) \quad (ii) \log \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

(test-3) $f(x) = \tan^{-1}(x)$ とする。

(a) $f'(x), f''(x)$ を求めよ。

(b) $(1+x^2)f'(x) = 1$ の両辺を n 回微分せよ。

(c) $f(x)$ を Maclaurin 展開せよ。ただし、 x^{11} の項まで展開し、一般的な項としては x^{2m+1} の項をつけよ。なお、剰余項はつけなくてよい。

(test-4) 次の極限を求めよ。

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin^{-1} x}{x^3} \quad (ii) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x \right)$$

(test-5) 次の関数が原点 $(0, 0)$ において極限値を持つかどうか調べよ。極限を持つのであれば、その極限値も求め、 $\epsilon - \delta$ 論法でその極限値になることを示せ。また、極限値を持たないのであれば、その根拠を述べよ。

$$(i) f(x, y) = \frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (ii) f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

(test-6) (a) $u = \log \sqrt{x^2 + y^2}$ について $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ を求めよ。

(a) $u = \frac{1}{2\sqrt{c\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4ct}}$ (c は定数) について $\frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ を求めよ。

問題は以上。

※答案の返却について：数学事務室 (本館 3 階 332B) にて、7 月 30 日から 8 月 5 日 (予定) に答案を返却します。返却開始は演習のウェブページ (<http://www.is.titech.ac.jp/~makoto/class.html>) でアナウンスします。ウェブページでは返却開始とともに、期末テストと出席点、発表などの割合による最終的な点数の計算方法を示します。この点数が 60 点以上で単位取得となります。線形代数と微分積分は別々に点数をつけ、別々の単位取得となります。なお、採点に間違いを見つけた場合は 8 月 6 日の正午まで (予定) に報告してください。

略解

(test-1) i, ii は各 5 点で、iii は 10 点。ただし、i は絶対値がない場合部分的に減点。逆に ii は絶対値がある場合は部分的に減点。iii については、 ϵ を任意に取れていない場合 (M を先に決めてから $\epsilon = \frac{1}{M}$ としている場合などを含む) など、部分的に減点。

i. $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N, \quad \left| \frac{1}{a_n} \right| < \epsilon$

ii. $\forall M > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N, \quad a_n > M$

iii. $\forall \epsilon > 0$ について、 $M = \frac{1}{\epsilon}$ と置くと $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N, \quad a_n > M$ である。したがって、 $n \geq N$ では、 $0 < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{M} = \epsilon$ となり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ が示される。

(test-2) 各 5 点で、軽微な計算間違いや最終的な形まで整理されていないときには各 3 点減点。

$$(i) \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2(a + b \cos x)} \quad (ii) \frac{1}{\sin x}$$

(test-3) (a),(b) は 5 点で (c) は 10 点。

(a) $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$

(b) $\frac{d^n}{dx^n}((1+x^2)f'(x)) = (1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nx f^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0$

(c) $\tan^{-1}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{2m+1} + \cdots$

(test-4) 各 5 点で、軽微な計算間違いには各 2 点減点。

(i) $-1/6$ (ii) 1

(test-5) 各 10 点で、極限が有るか無しかの判断に 5 点とその証明に 5 点の内訳。証明の内容によっては、部分的に減点。

(i) 極限值 0

まず、 $f(x, y) = \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{2x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2\sqrt{x^2+y^2}$ である。よって、 $\forall \epsilon > 0$ に対して、 $\delta = \epsilon/2$ とすれば、

$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} < \delta$ となる (x, y) について、 $f(x, y) = \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 2\sqrt{x^2+y^2} < 2\delta = \epsilon$ となる。

$f(x, y) \geq 0$ より、 $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} < \delta$ となる (x, y) について、 $|f(x, y) - 0| < \epsilon$ である。

(ii) 極限值をもたない

$y = mx^2$ を考えると、 $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \frac{mx^4}{x^4 + m^2 x^4} = \frac{m}{1+m^2}$ となり、 m に依存する。

(test-6) 各 5 点で、部分点無し。

(i) 0 (ii) 0